



**Titre:** Simulation du givrage sur ailes en flèche par méthodes  
Title: RANS/Eulérienne quasi stationnaires

**Auteur:** Simon Bourgault-Côté  
Author:

**Date:** 2015

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bourgault-Côté, S. (2015). Simulation du givrage sur ailes en flèche par méthodes  
Citation: RANS/Eulérienne quasi stationnaires [Master's thesis, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1710/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1710/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Éric Laurendeau  
Advisors:

**Programme:** Génie aérospatial  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION DU GIVRAGE SUR AILES EN FLÈCHE PAR MÉTHODES  
RANS/EULÉRIENNE QUASI STATIONNAIRES

SIMON BOURGAULT-CÔTÉ  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE AÉROSPATIAL)  
AVRIL 2015

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

SIMULATION DU GIVRAGE SUR AILES EN FLÈCHE PAR MÉTHODES  
RANS/EULÉRIENNE QUASI STATIONNAIRES

présenté par : BOURGAULT-CÔTÉ Simon

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. REGGIO Marcelo, Ph. D., président

M. LAURENDEAU Éric, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. FORTIN Guy, Ph. D., membre

## REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mon directeur de recherche, Éric Laurendeau, pour son soutien au cours de ce projet. Il n'a jamais hésité à me consacrer du temps pour discuter de l'avancement du projet et des problèmes rencontrés et il a toujours su m'orienter dans la bonne direction pour résoudre ces derniers.

Je remercie spécialement Bombardier Aéronautique pour le support financier et pour l'aide précieuse du département de l'aérodynamique avancé. Je tiens aussi à remercier le FRQNT et le CRSNG pour leur support financier.

J'aimerais également remercier mes collègues, en particulier Kazem pour le mailleur qui a complété le programme et Dorian qui a fourni des résultats de NSMB-ICE ainsi que plusieurs astuces pour développer le programme.

Finalement, j'aimerais remercier mes parents pour leur support constant durant toutes ces études.

## RÉSUMÉ

Les simulations numériques prennent de plus en plus de place dans les processus de conception et de certification en ingénierie, il en va de même dans le domaine de l'aéronautique. Les programmes utilisés par l'industrie aéronautique permettent maintenant de simuler très précisément les phénomènes physiques reliés aux avions, grâce à un développement constant de la technologie. Cependant, certains domaines moins connus stagnent ; c'est le cas des simulations de givrage en vol sur les avions. Afin d'évaluer quantitativement l'accumulation de la glace sur un avion selon différents paramètres atmosphériques, un programme de givrage nécessite la résolution de plusieurs phénomènes physiques, l'écoulement de l'air, l'écoulement des gouttelettes d'eau dans l'air, les échanges thermodynamiques sur la surface recevant des gouttelettes et la production de la nouvelle surface. Un manque de précision dans un seul de ces modules compromet le résultat final. Or, les logiciels utilisés par l'industrie sont composés de technologie basse fidélité. Ces logiciels, développés dans les années 90 n'ont pas été améliorés par l'ajout de nouvelles technologies de haute fidélité depuis l'an 2000. La raison est simplement que l'implémentation de ces nouvelles technologies est parfois complexe et risquée d'un point de vue financier. Pourtant, l'augmentation des contraintes en givrage imposées par les autorités de certification rend ce changement nécessaire.

C'est pourquoi Bombardier Aéronautique s'intéresse au développement d'un nouveau programme de givrage porté au niveau de l'état de l'art dans le domaine. Une collaboration a donc été établie avec Polytechnique Montréal, sous la supervision du professeur Éric Laurendeau, afin que les meilleures techniques soient implémentées et validées en milieu universitaire où les risques sont moindres. Le projet comporte deux objectifs principaux : d'abord, créer un programme bidimensionnel d'accrétion de glace en vol robuste, efficace et automatique, et ensuite, ajouter un modèle simulant en partie les effets tridimensionnels du givrage plus rapidement qu'une simulation tridimensionnelle complète.

Dans la première partie du projet, les différents modules requis pour la simulation du givrage ont été développés. Une hiérarchie claire a été définie afin d'intégrer les modules déjà existants au sein du groupe de recherche : le mailleur NSGRID, le solveur Navier-Stokes NSCODE et le préprocesseur chimère. Le premier permet de générer les maillages requis à toutes les itérations du processus de givrage. Le second résout l'écoulement de l'air autour du profil simulé. Le dernier gère la superposition de grilles, ce qui diminue les contraintes sur les maillages, en augmentant ainsi la qualité, et permet la simulation de profils composés de plusieurs éléments. Les modules créés au sein du projet sont donc le solveur du champ de

gouttelettes, le modèle thermodynamique et l'algorithme d'évolution de la géométrie.

Trois schémas de solveur ont été implémentés pour résoudre les équations Eulériennes du champ de gouttelettes : un schéma explicite Runge-Kutta, un schéma semi-implicite Runge-Kutta et un schéma implicite d'Euler. Chaque fois, le manque d'efficacité et de robustesse nécessitait l'application d'un nouveau schéma. Il est apparu que le schéma d'Euler implicite est le plus efficace et qu'il est très robuste lorsque les équations sont résolues de façon découplées. C'est donc ce schéma qui a été utilisé pour obtenir tous les résultats.

Le modèle de Messinger itératif a été implémenté pour résoudre les échanges thermodynamiques. Il est composé des mêmes bilans de masse et d'énergie que le modèle de Messinger standard, mais ces bilans sont englobés dans une boucle itérative permettant de résoudre de façon plus appropriée l'écoulement de l'eau sur le profil. Ce modèle est de basse fidélité étant donné les relations empiriques qu'il contient, mais il s'agit d'une première étape dans le développement du modèle thermodynamique avant l'implémentation d'un modèle plus précis. D'ailleurs, l'évolution de la géométrie est aussi effectuée sans précision puisque l'algorithme implémenté est non conservateur au niveau de la masse de glace accumulée, une pratique couramment utilisée pour ce module.

Le programme a été validé en deux dimensions sur un cas de givre et un cas de verglas. Les résultats sont cohérents avec les données expérimentales et avec les résultats obtenus par d'autres programmes, mais ils présentent un manque de précision par rapport à l'amplitude de glace. En particulier, le cas de verglas montre que le modèle thermodynamique employé n'est pas adéquat pour la résolution de l'écoulement d'eau à la surface.

Le programme a ensuite été amélioré lors de la deuxième phase du projet par l'ajout d'un modèle 2.5D au solveur du champ de gouttelettes pour obtenir l'effet de l'angle de flèche d'une aile sur l'accumulation de glace. Il s'agit d'émettre l'hypothèse que l'aile en flèche est infinie, ce qui permet de simplifier l'équation de la vitesse transversale et de résoudre le système 3D simplifié sur un domaine bidimensionnel, d'où l'appellation 2.5D. Cette technique avait été testée sur le solveur Navier-Stokes auparavant et les résultats obtenus confirment l'efficacité de la démarche. Deux modèles empiriques simulant la flèche ont aussi été implémentés à des fins de comparaison. Il est démontré que le modèle thermodynamique n'est pas affecté par l'hypothèse de l'aile en flèche infinie.

Une validation a ensuite été effectuée sur des cas d'aile en flèche infinie et d'aile en flèche finie. Les résultats obtenus sont encourageants, car ils sont très similaires aux données expérimentales ainsi qu'aux résultats tridimensionnels obtenus par d'autres programmes. Par ailleurs, la résolution en 2.5D donne de meilleurs résultats que les modèles empiriques. Cette technique a été jugée adéquate pour simuler les effets tridimensionnels du givrage, sans pour

autant nécessiter le temps de calcul d'une simulation 3D complète.

Le programme développé, NSCODE-ICE, est limité par plusieurs aspects. D'abord, le modèle thermodynamique et l'algorithme d'évolution de la géométrie sont de basse fidélité. Il serait possible de régler ces problèmes en utilisant un modèle basé sur des équations aux dérivées partielles pour modéliser les échanges thermodynamiques et l'écoulement de l'eau sur le profil. Un algorithme robuste conçu pour le givrage doit aussi être implémenté afin de gérer l'évolution de la géométrie due au givrage. Le programme est aussi limité de façon générale à la simulation de géométries simples, puisque la méthode chimère permettant la superposition des maillages n'est pas encore adaptée aux modules de givrage.

## ABSTRACT

Numerical simulations are becoming increasingly used by engineers in the design and certification processes, especially in aeronautics where flight tests are so expensive. The numerical tools used by the industry are continuously improved in order to simulate and analyse almost every physical behaviors of airplanes. This technology development was not done in all domains though, which is the case of inflight ice accretion softwares. These comprise many modules solving different physical phenomena in order to obtain ice accretion shapes on the airplanes in various atmospheric conditions. These modules are an airflow solver, a droplet flow solver, a thermodynamic solver and a geometry evolution algorithm. If any of these presents a lack of precision, the final results can be wrong and the whole process is jeopardized. Even then, the softwares used by the industry are based on low fidelity technology in each modules. In fact, these softwares were developed in the early 90's and were not improved with the new techniques developed since year 2000. These techniques are simply too complex to implement, which is risky for a company. Nevertheless, as the certification authorities are increasing the icing constraints on the industry, a massive change is required in these icing simulation tools.

This is why Bombardier Aeronautic showed interest in the development of a new state-of-the-art icing simulation software. A collaborative project was then started with Polytechnique Montreal, under the supervision of prof. Éric Laurendeau, in order to implement and validate the best techniques in icing while in academia, where risks are low. The project consists of two main objectives. First, a two-dimensional inflight ice accretion software needs to be developed with robustness, efficiency and automation as its main characteristics. Then, some three-dimensional icing should be simulated with a proper numerical model added to the two-dimensional software, without requiring the same CPU resources as a full three-dimensional icing software.

In the first part, the modules required for icing simulation were developed. A framework was defined in order to integrate the modules already existing, which were developed in the research group. These are the mesher, NSGRID, the airflow solver, NSCODE, and the chimera preprocessor. The first is used to generate the meshes required at each ice accretion timestep. The second solves the airflow around the simulated geometry. The later enables the use of overset grids, which leads to high quality grids and the simulation of multi-element wings. The modules developed in this project are then the droplets flow solver, the thermodynamic module and the geometry evolution algorithm.



Three solver schemes were implemented in order to solve the droplets flow using the Eulerian equations system : an explicit Runge-Kutta scheme, a point-implicit Runge-Kutta scheme and an Euler implicit scheme. The first two solvers were not efficient enough and presented a lack of robustness which led to the implementation of a new scheme. The Euler implicit scheme appeared to be very efficient and robust when using a decoupled approach to solve the equations. Therefore this scheme was chosen over the two others for producing results.

The iterative Messinger model was implemented in order to solve the thermodynamic balances along the surface. It comprises the same mass and energy balances as the standard Messinger model, but the runback water is solved iteratively, which seemed more appropriate than the direct way done by the standard model. While this model is a low fidelity one with empirical relations, it was implemented as a first step before going ahead with a more precise and more complex model. Besides, the geometry evolution algorithm implemented also presents a lack of precision and is not conservative for accreted ice mass.

The developed software was validated over two-dimensional icing cases, one rime ice and the other glaze ice. The results are in agreement with experimental data and results obtained with other icing softwares, although they show a lack of quantitative precision on the accreted ice mass. In particular, the glaze ice case reveals that the runback water is not well solved by the thermodynamic module.

In the second part of the project, the software was improved by adding a new equation to the droplets flow solver in order to capture the sweep effect on a wing. In fact, the crossflow equation is simplified by using the infinite swept wing hypothesis in order to solve the three-dimensional system in a simplified way on a two-dimensional domain, which is called a 2.5D simulation. This technique had been tested on the Navier-Stokes solver before and gave good results, which confirmed the efficiency of the method. Two empirical sweep models were also implemented for comparison. It is important to note that the thermodynamic model is not affected by this hypothesis.

A validation of the 2.5D model was also performed on both an infinite swept wing and a finite swept wing. The results being very similar to experimental data and results obtained with three-dimensional icing programs, the technique seems suitable to simulate 3D icing without the burden of a full three-dimensional simulation. Moreover, the 2.5D results gave better behavior than the two empirical sweep models implemented.

The developed program, NSCODE-ICE, is limited on some aspects. First, the thermodynamic module and the geometry evolution algorithm are based on low fidelity technology. It would be possible to solve that problem by implementing a shallow water icing model, which solves the runback water and the thermodynamic balances using partial differential equations. The

geometry evolution should be improved by the development of an icing oriented technique where robustness would be a main requirement. Finally, as the chimera technique is not integrated in the icing modules, the simulations were limited to simple element wings.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iii
RÉSUMÉ . . . . .	iv
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Définitions et concepts de base . . . . .	1
1.1.1 Équation générique . . . . .	1
1.1.2 Méthode des volumes finis . . . . .	2
1.1.3 Processus de résolution découplée . . . . .	3
1.1.4 Résolution quasi stationnaire . . . . .	4
1.1.5 Définitions . . . . .	5
1.2 Éléments de la problématique . . . . .	5
1.2.1 Équations Eulériennes de la phase dispersée . . . . .	5
1.2.2 Accumulation de la glace . . . . .	6
1.2.3 Effets tridimensionnels en givrage . . . . .	6
1.2.4 Efficacité . . . . .	7
1.3 Objectifs de recherche . . . . .	7
1.4 Plan du mémoire . . . . .	8
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	9
2.1 Historique des programmes de givrage . . . . .	9
2.1.1 Détails des modules de CANICE . . . . .	10
2.1.2 Historique au sein du groupe de recherche . . . . .	12
2.2 Résolution de la phase dispersée . . . . .	13

2.3	Traitement du terme source . . . . .	14
2.4	Modèle thermodynamique . . . . .	15
2.5	Givrage tridimensionnel . . . . .	15
CHAPITRE 3	Développement du programme de givrage . . . . .	17
3.1	Hiérarchie générale du programme . . . . .	17
3.1.1	Processus d'accumulation de glace quasi stationnaire . . . . .	17
3.2	Modules existants . . . . .	19
3.2.1	Générateur de maillage . . . . .	19
3.2.2	Solveur Navier-Stokes . . . . .	21
3.2.3	Préprocesseur chimère . . . . .	21
3.3	Solveur du champ de gouttelettes . . . . .	23
3.3.1	Définition des équations 2D . . . . .	23
3.3.2	Solveur explicite Runge-Kutta . . . . .	25
3.3.3	Solveur Runge-Kutta semi-implicite . . . . .	28
3.3.4	Solveur implicite Euler . . . . .	30
3.3.5	Vérification de l'ordre de précision . . . . .	32
3.3.6	Efficacité de la parallélisation . . . . .	33
3.3.7	Résultats du solveur . . . . .	34
3.4	Solveur thermodynamique . . . . .	36
3.4.1	Concept du modèle de Messinger itératif . . . . .	37
3.4.2	Équation de conservation de la masse . . . . .	38
3.4.3	Équation de conservation de l'énergie . . . . .	38
3.4.4	Coefficient de friction . . . . .	40
3.4.5	Coefficient du transfert de chaleur convectif . . . . .	41
3.5	Évolution de la géométrie . . . . .	41
3.6	Résultats bidimensionnels . . . . .	43
3.6.1	Givre : cas 33 de la NASA . . . . .	43
3.6.2	Verglas : cas 31 de la NASA . . . . .	45
3.6.3	Efficacité générale du processus . . . . .	46
CHAPITRE 4	Simulation de givrage sur une aile en flèche . . . . .	47
4.1	Solveur Navier-Stoke 2.5D . . . . .	47
4.1.1	Équation de l'écoulement transversal . . . . .	47
4.1.2	Solveur et conditions limites . . . . .	48
4.1.3	Résultats préliminaires . . . . .	48
4.2	Solveur de gouttelettes 2.5D . . . . .	49

4.2.1	Équation transversale des gouttelettes . . . . .	49
4.2.2	Solveur et conditions limites . . . . .	49
4.3	Solveur thermodynamique . . . . .	50
4.4	Modèles 2D de la flèche . . . . .	51
4.4.1	Modèle de Dorsch . . . . .	51
4.4.2	Modèle de Pueyo . . . . .	52
4.5	Résultats . . . . .	52
4.5.1	Comparaison avec une aile infinie . . . . .	53
4.5.2	Comparaison avec une aile finie . . . . .	55
CHAPITRE 5	CONCLUSION . . . . .	58
5.1	Synthèse des travaux . . . . .	58
5.1.1	Programme bidimensionnel de givrage . . . . .	58
5.1.2	Givrage sur aile en flèche . . . . .	59
5.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	60
5.3	Améliorations futures . . . . .	61
5.3.1	Solutions aux limitations . . . . .	61
5.3.2	Axes d'innovation . . . . .	63
RÉFÉRENCES	. . . . .	64
ANNEXES	. . . . .	70

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 3.1	Paramètres du cas 405 de la NASA. . . . .	34
Tableau 3.2	Cas standards de validation en givrage bidimensionnel. . . .	43
Tableau 3.3	Temps requis pour chaque module. . . . .	46
Tableau 4.1	Données des cas de givrage tridimensionnel. . . . .	55

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Définitions physiques des volumes de contrôle. . . . .	3
Figure 1.2	Processus quasi-stationnaire. . . . .	4
Figure 2.1	Exemple d'un maillage pour la méthode des panneaux. . . . .	11
Figure 2.2	Évolution du programme de givrage développé à Polytechnique.	12
Figure 2.3	Solution triviale du système d'équations des gouttelettes. . . .	13
Figure 2.4	Glace sur une aile en flèche. . . . .	16
Figure 3.1	Hierarchie du programme développé. . . . .	18
Figure 3.2	Maillage d'une aile composée de plusieurs éléments. . . . .	19
Figure 3.3	Exemple de maillage généré. . . . .	20
Figure 3.4	Exemple de maillages superposés traités avec la technique chimère.	22
Figure 3.5	Nomenclature des faces et des voisins d'une cellule active. . . .	27
Figure 3.6	Convergence en maillage du solver Eulérien. . . . .	32
Figure 3.7	Accélération en fonction du nombre de processeurs. . . . .	33
Figure 3.8	Courbes de convergence des trois solveurs. . . . .	34
Figure 3.9	Champ de gouttelettes d'un profil NACA0012. . . . .	35
Figure 3.10	Taux de captation des gouttelettes sur un profil NACA0012. .	36
Figure 3.11	Types de surface possibles : Sèche, Mouillée et Liquide. . . . .	37
Figure 3.12	Bilan de masse sur un volume de contrôle. . . . .	38
Figure 3.13	Bilan d'énergie sur un volume de contrôle. . . . .	39
Figure 3.14	Effet de la rugosité sur le coefficient de friction. . . . .	40
Figure 3.15	Évolution de la géométrie sur des régions convexes et concaves.	42
Figure 3.16	Cas 33 de la NASA en 2D. . . . .	44
Figure 3.17	Cas 31 de la NASA en 2D. . . . .	45
Figure 3.18	Évolution du temps durant le processus. . . . .	46
Figure 4.1	Système de coordonnées modifiées. . . . .	47
Figure 4.2	Lignes de friction sur une aile en flèche infinie. . . . .	49
Figure 4.3	Courbes de convergences 2.5D. . . . .	50
Figure 4.4	Cas 33 de la NASA avec 20° d'angle de flèche. . . . .	53
Figure 4.5	Cas 33 de la NASA avec 40° d'angle de flèche. . . . .	54
Figure 4.6	Cas 33 de la NASA à tous les angles de flèche. . . . .	54
Figure 4.7	Vue de haut de l'aile finie GLC305. . . . .	55
Figure 4.8	Maillage utilisé pour simuler le profil GLC305. 257x129. . . . .	56
Figure 4.9	Comparaison des résultats à la coupe A de l'aile GLC. . . . .	56

Figure 4.10	Comparaison des résultats à la coupe B de l'aile GLC. . . . .	57
Figure 4.11	Courbes du taux de captation aux coupes A et B. . . . .	57
Figure 5.1	Sphère avec accumulation de glace discontinue. . . . .	62
Figure 5.2	Accumulation de glace avec algorithme morphogénétique. . . .	63
Figure A.1	Maillage 3D de l'aile en flèche finie GLC305. . . . .	70



## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

AOA	Angle of attack	Angle d'attaque
CFD	Computational Fluid Dynamics	Mécanique des fluides numérique
CFL	Courant-Driedrichs-Lewy	-
ISW	Infinite Swept Wing	Aile en flèche infinie
LWC	Liquid Water Content	Contenu en eau liquide
MPI	Message Passing Interface	-
MVD	Median Volumetric Diameter	Diamètre volumétrique médian
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes	Moyennage temporelle des équations de Navier-Stokes
SWIM	Shallow Water Icing Model	Modèle de givrage en eau peu profonde
VLM	Vortex Lattice Method	-

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Maillage tridimensionnel . . . . .	70
----------	------------------------------------	----

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Depuis quelques décennies, l'ingénierie se tourne de plus en plus vers les simulations numériques afin de résoudre des problèmes dans de nombreux domaines : aéronautique, construction, procédés chimiques, industries automobile et maritime, etc. Parmi ces techniques de simulation, la mécanique des fluides numériques, ou «Computational Fluid Dynamics» (CFD), est très populaire et permet de résoudre des systèmes d'équations liés à l'écoulement des fluides, à la thermodynamique, au comportement de corps dans des fluides, etc. L'intérêt de cette technologie est de réduire, ou même d'éliminer, le recours aux essais physiques qui sont onéreux et qui demandent beaucoup de temps de travail. Dans le cas du givrage en vol d'un avion, par exemple, les simulations permettent de diminuer les coûts et le danger associés aux essais en vol lors de la certification de l'avion en prédisant la forme que prendra l'accumulation de glace. Dans un contexte où les autorités de certification demandent de plus en plus de garanties quant à la sécurité des appareils (FAA, 2014), il est essentiel de développer des programmes de givrage précis et performants.

### 1.1 Définitions et concepts de base

#### 1.1.1 Équation générique

La CFD est souvent associée aux équations de Navier-Stokes qui définissent l'écoulement d'un fluide, mais il s'agit d'une technique numérique très polyvalente qui s'applique à de nombreux systèmes d'équations. Il est donc important de cibler, dès le début, le type d'équation qui fera l'objet de ce mémoire. Les lois de conservation de la masse, du momentum et de l'énergie seront toutes étudiées sous la forme d'équations de transport. Une telle équation unidimensionnelle peut être présentée sous sa forme différentielle ou sous sa forme intégrale (Versteeg et Malalasekera, 2007), chacune ayant son utilité :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (1.1a)$$

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \rho\phi dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A \vec{n} \cdot (\rho\phi\vec{u}) dA dt = \int_{\Delta t} \int_A \vec{n} \cdot (\Gamma\nabla\phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\phi dV dt \quad (1.1b)$$

Où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\phi$  une propriété scalaire,  $\vec{u}$  le vecteur vitesse,  $\Gamma$  le coefficient

de diffusion et  $S_\phi$  le terme source volumique associé à  $\phi$ . Il est possible de résoudre cette équation en deux phases : une résolution physique et une résolution temporelle. La première est faite par une discrétisation spatiale qui divise le domaine en un nombre fini de points. La seconde nécessite une discrétisation temporelle et le schéma employé pour ce faire est souvent appelé solveur, peu importe son type. Un solveur explicite fera référence à la solution connue pour déterminer la nouvelle solution, alors qu'un solveur implicite fera aussi référence à la nouvelle solution, ce qui nécessitera le recours à une résolution itérative de la matrice étant donné la non linéarité du système.

### 1.1.2 Méthode des volumes finis

Les techniques employées pour résoudre le problème discrétisé spatialement sont principalement les différences finies, les éléments finis et les volumes finis (Blazek, 2001). Dans tous les cas, la définition du problème commence par une discrétisation de l'espace par le biais d'un maillage. Il peut s'agir d'une grille structurée ou non. Dans le premier cas, les cellules sont ordonnées selon une topologie précise, des indices souvent nommés  $i, j, k$  en trois dimensions. Les voisins physiques d'une cellule sont aussi ses voisins topologiques. Dans cette catégorie se situent les maillages cartésiens ou curvilignes, formés de quadrilatères en deux dimensions. Dans le second cas, les cellules sont numérotées et deux cellules contiguës dans la liste ne sont pas forcément voisines physiquement dans le maillage. Ces maillages sont le plus souvent composés d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux, de façon exclusive où un seul type est présent ou de façon hybride où les deux types se côtoient. L'utilisation des maillages non structurés permet de représenter facilement et adéquatement des géométries très complexes, mais qui nécessitent plus de mémoire et une implémentation plus lourde qu'un programme basé sur les maillages structurés (Blazek, 2001).

La méthode des volumes finis est très populaire au sein de la communauté oeuvrant dans le domaine des simulations numériques par sa facilité d'implémentation. Elle se combine bien aussi aux maillages structurés et c'est cette combinaison qui sera utilisée dans ce projet afin d'allier simplicité et efficacité. La méthode consiste en fait à approximer l'intégrale sur le domaine dans l'équation (1.1b) par la somme des flux traversant chaque face des volumes de contrôle divisant le domaine. Le problème peut ensuite être résolu en employant une technique itérative liée à une discrétisation temporelle. Il existe deux formulations, illustrées à la figure 1.1 pour définir les volumes de contrôle (Blazek, 2001) à partir d'un maillage.

Dans la figure 1.1, où un maillage structuré cartésien est représenté, les points noirs représentent les noeuds du maillage, et les traits foncés, les faces des volumes de contrôle. Dans la figure 1.1(a), le point bleu représente l'emplacement où les informations sont stockées,

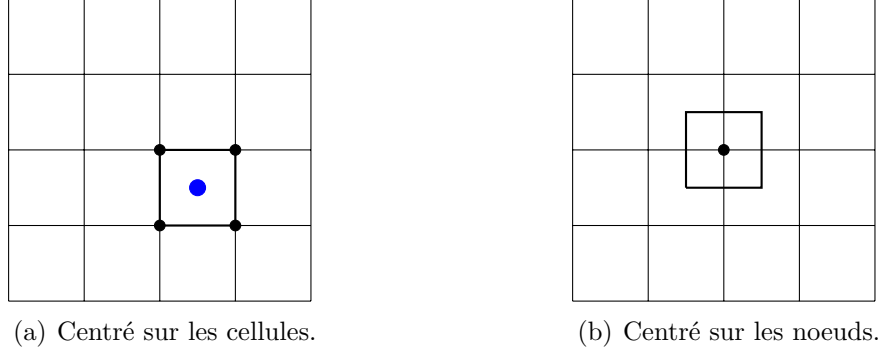


Figure 1.1 Définitions physiques des volumes de contrôle.

alors que l'emplacement de stockage est le noeud lui-même dans la figure 1.1(b). Dans cette dernière, le volume de contrôle aurait aussi pu être l'ensemble des cellules entourant le noeud. Les deux formulations montrées présentent des avantages et des inconvénients. Cependant, c'est la première qui est implémentée dans ce projet, car elle simplifie le traitement des conditions limites sur les configurations complexes (Zhu *et al.*, 2000). C'est d'ailleurs pourquoi cette formulation est implémentée dans les codes de la NASA (CFL3D), de l'ONERA (ELSA) et de Bombardier Aéronautique (FANSC).

### 1.1.3 Processus de résolution découplée

Un problème standard est résolu avec la méthode des volumes finis en suivant trois étapes de base :

1. Génération du maillage ;
2. Discrétisation ;
3. Résolution du système d'équations.

En résolvant un système d'équations où toutes les équations s'influencent entre elles, on effectue une résolution couplée. Dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles en deux dimensions, par exemple, on aura quatre équations à résoudre dans le système. L'équation d'énergie ne pourrait pas être résolue toute seule, car l'influence des équations de continuité et de momentum est trop forte sur sa solution. Ce système en particulier doit obligatoirement être résolu de façon couplée.

Cependant, dans certains cas, les équations peuvent être regroupées en plusieurs systèmes qui ne sont pas liés entre eux, ou alors très faiblement et dans un seul sens. Le lien pourrait provenir de la présence d'une variable du système 1 dans un terme source du système 2, par exemple. Dans ces cas-là, il est plus facile de résoudre chaque système (ou chaque équation)

indépendamment. On ajoutera alors autant d'étapes de résolution qu'il y a de systèmes indépendants. C'est ce que l'on appelle une résolution découplée.

#### 1.1.4 Résolution quasi stationnaire

Les équations (1.1) de la section 1.1.1 sont présentées sous leur forme instationnaire, c'est-à-dire qu'elles dépendent du temps. Si la discrétisation temporelle implémentée est précise en temps, il sera possible de résoudre le problème en considérant le changement dans le temps de la solution. Néanmoins, il est aussi possible de résoudre ces équations sans précision temporelle, de façon à obtenir une solution stationnaire, donc qui ne change plus en fonction du temps. C'est souvent ce qui est fait pour obtenir les paramètres aérodynamiques d'une certaine configuration, par exemple.

Entre ces deux extrêmes, on retrouve la résolution quasi stationnaire et c'est ce type de résolution qui sera employée pour le givrage. Dans ce cas, les différents systèmes d'équations impliqués seront résolus de façon stationnaire à chaque intervalle de temps où la glace est accumulée, sans considération pour les solutions passées. En effet, le temps n'interviendra que pour multiplier le taux d'accumulation de glace à chaque volume de contrôle, de façon à obtenir la nouvelle géométrie. On obtient ainsi un processus essentiellement basé sur des solutions stationnaires, mais qui évolue dans le temps, comme le montre la figure 1.2 où les éléments en rouge dépendent du temps.

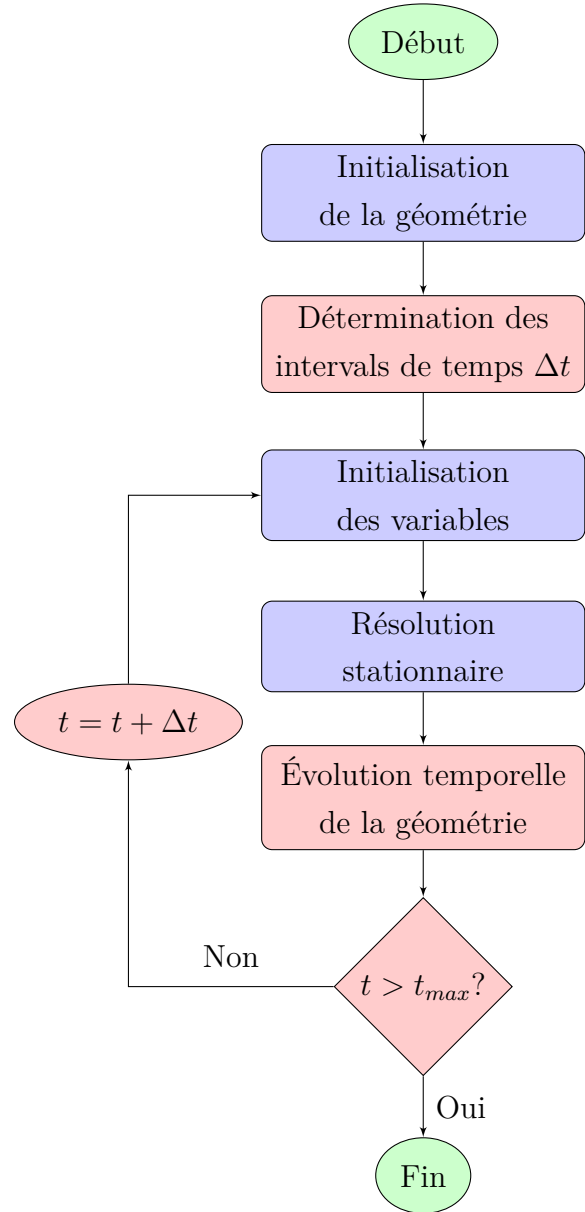


Figure 1.2 Processus quasi-stationnaire.

### 1.1.5 Définitions

- *Givre* : Glace qui se forme lorsque les gouttelettes d’eau en suspension gèlent complètement à l’impact. Aucun écoulement d’eau ne survient.
- *Verglas* : Glace qui se forme lorsqu’une portion de l’eau frappant la surface gèle, ce qui génère un écoulement d’eau sous forme de film.
- *Incrément de temps* : Saut temporel dans un processus de résolution où le temps est impliqué. Dans le processus de givrage, le nombre d’incrément de temps définit le nombre de fois où la glace est accumulée et où la géométrie est modifiée de façon quasi stationnaire.

## 1.2 Éléments de la problématique

### 1.2.1 Équations Eulériennes de la phase dispersée

Afin d’accumuler de la glace sur une géométrie, il faut d’abord déterminer où l’eau, sous forme de gouttelettes, frappera cette géométrie. C’est ce que l’on appelle la phase dispersée. La quantité d’eau entrant en collision avec la surface ainsi que la vitesse et la direction de cette eau auront un effet important. Pour obtenir ces informations, il faut résoudre les équations dictant le mouvement de ces gouttelettes. Dans les plus vieux codes de givrage, l’approche Lagrangienne employée consiste à considérer les gouttelettes individuellement et à suivre l’évolution de leur trajectoire grâce aux équations du mouvement considérant les forces externes, la force de traînée, entre autres (Brahimi *et al.*, 1994).

Cependant, dans l’optique du développement d’un programme de givrage basé sur les équations aux dérivées partielles, ce qui représente l’état de l’art, il faut plutôt considérer le système d’équations des gouttelettes sous sa forme Eulérienne. On peut alors obtenir en tout point le champ vectoriel de la vitesse des gouttelettes ainsi que leur concentration dans l’air. Le système d’équations de type Eulérien partage les mêmes racines que le système d’équations de Navier-Stokes, dont la résolution est très documentée (Blazek, 2001; Versteeg et Malalasekera, 2007; Cebeci *et al.*, 2005; Ferziger et Peric, 1996). Cependant, résoudre ce système peut être plus problématique qu’il n’y paraît. En effet, l’équation du momentum du champ de gouttelettes contient des termes sources très forts qui déterminent la stabilité du système. Or, ce n’est pas le cas des équations en général de Navier-Stokes, ce qui implique qu’une étude mathématique approfondie de chaque technique doit être effectuée afin de l’adapter au champ de gouttelettes.

### 1.2.2 Accumulation de la glace

Une fois que l'écoulement de l'air et le champ de gouttelettes sont évalués, il est possible de déterminer la quantité de glace qui se forme sur la surface. Le problème est double. D'une part, il faut évaluer les caractéristiques thermodynamiques sur la géométrie. Ces caractéristiques servent à calculer le taux d'accumulation de glace sur chaque élément de surface. D'autre part, il faut utiliser ces taux afin de générer une nouvelle surface. Cette dernière doit représenter les caractéristiques physiques d'une accumulation de glace et de plus être numériquement valide afin d'être utilisée afin de générer un maillage à l'itération suivante.

Dans le premier cas, le coefficient de transfert de chaleur convectif qui doit être évalué provient généralement de relations empiriques, car l'écoulement de l'air est généralement simulé avec une condition adiabatique à la paroi (Cebeci *et al.*, 2005). Cela s'ajoute aux difficultés de simuler l'eau de ruissellement sur le profil, lorsque la glace est du type verglas. En effet, dans les cas les plus complexes, la présence de plusieurs points de stagnations rend difficile la détermination de la direction de ruissellement d'eau, ce qui entraîne une mauvaise précision sur la quantité d'eau qui ruisselle. Le modèle thermodynamique utilisé doit donc être complet et robuste.

Dans le second cas, les relations physiques employées pour évaluer l'épaisseur de la glace peuvent être limitées par l'amplitude de glace produite. En effet, dans des régions concaves, un repliement de la surface est fréquent, ce qui la rend invalide à toute utilisation ultérieure dans le processus de givrage. Si cela survient au milieu d'une simulation avec plusieurs incréments de temps, l'ensemble des données est perdu ou incomplet. De plus, même un algorithme robuste pourrait générer ou perdre de la glace si l'algorithme traitait les repliements, sans redistribuer la glace dédoublée, par exemple. Il s'agit donc d'un élément crucial du programme, car toute précision obtenue dans les autres modules peut être perdue si l'évolution de la géométrie est inadéquate.

### 1.2.3 Effets tridimensionnels en givrage

Le présent projet est limité au développement d'un programme bidimensionnel. Non seulement développer à partir de zéro un programme en trois dimensions est difficile, mais en plus un programme de givrage tridimensionnel est particulièrement complexe du point de vue de l'accumulation de la glace. En effet, les formes de glace tridimensionnelles présentent souvent des repliements et des vides que l'on ne voit pas en deux dimensions (Wright *et al.*, 1997). De plus, un programme de givrage tridimensionnel demande beaucoup de temps de calcul, ce qui n'est pas idéal pour développer et tester de nouveaux concepts (Pueyo, 2013).



Cependant, les effets tridimensionnels sont importants pour la certification des avions ainsi que pour le développement des systèmes antigivrage à l'entrée des moteurs ou sur de petits systèmes externes comme les tubes de Pitot. Il est possible que des modèles puissent simuler certains de ces effets tridimensionnels au sein d'une simulation bidimensionnelle, ce qui permettrait de se libérer des contraintes d'une simulation 3D et d'augmenter l'enveloppe des conditions de vol et de géométrie possibles à simuler.

#### 1.2.4 Efficacité

Un programme de simulation destiné à l'industrie, comme c'est le cas du présent projet, doit répondre à deux critères de base. Le premier est une condition nécessaire, alors que le second, est une condition suffisante (Cebeci *et al.*, 2005).

1. Le programme doit reproduire la physique simulée avec une précision adéquate.
2. Le programme doit produire des résultats en moins de temps qu'une expérimentation.

Ainsi, l'efficacité générale du programme est un élément important à considérer. Dans de nombreux cas, les simulations sont constituées d'un seul système d'équations qui doit être résolu. Cependant, dans le cas du givrage, plusieurs modules très différents travaillent de concert afin d'obtenir l'accumulation de glace finale. D'autant plus que ce processus est parfois répété plusieurs fois afin de découper le temps d'accumulation en plusieurs incréments de temps. Il est donc crucial d'évaluer quelles sections demandent le plus de temps de calcul afin d'en réduire l'empreinte temporelle sur l'ensemble du processus.

### 1.3 Objectifs de recherche

Ce projet découle du besoin de Bombardier Aéronautique d'améliorer leur technologie de simulation du givrage en vol. Le logiciel actuellement employé par la compagnie, CANICE-BA (Brahimi *et al.*, 1994), a fait l'objet de deux décennies de travail d'amélioration et de maintenance, après son développement à Polytechnique Montréal. Cependant, les différents modules du logiciel sont tous basés sur des technologies de basse fidélité et nécessitent d'être remplacés. Par exemple, CANICE-BA utilise la méthode des panneaux afin de déterminer l'écoulement de l'air (Pueyo *et al.*, 2007), ce qui offre un degré de précision incompatible avec les simulations Navier-Stokes qui sont régulièrement utilisées pour tout autre sujet que le givrage. Le programme développé dans ce projet sera donc basé sur une nouvelle architecture et sur l'état de l'art actuel en terme de simulateur de givrage.

Le solveur NSCODE (Pigeon *et al.*, 2014), une plateforme de recherche développée par Éric

Laurendeau, directeur de ce projet et professeur agrégé à Polytechnique Montréal, sera utilisé comme solveur aérodynamique ; les autres modules seront développés en conséquence de ce choix. Le programme de givrage est donc nommé NSCODE-ICE. Bien qu'effectué en milieu universitaire, ce projet est destiné à un transfert vers l'industrie lorsque le programme sera jugé suffisamment mature pour répondre aux besoins de Bombardier Aéronautique en termes de robustesse et d'efficacité. Les trois principaux objectifs de ce projet peuvent être formulés comme suit :

1. Développer un logiciel de calcul bidimensionnel de givrage en vol capable de réaliser des simulations à plusieurs incréments de temps en un processus automatique et utilisant :
  - (a) Une méthode Eulérienne pour le champ de gouttelettes ;
  - (b) Une méthode RANS («Reynolds Averaged Navier-Stokes») pour le champ de vitesse et le coefficient de friction ;
  - (c) Un modèle thermodynamique de type Messinger.
2. Paralléliser le programme afin d'en améliorer l'efficacité en temps.
3. Développer un modèle pour simuler le givrage sur une aile infinie en flèche.

## 1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire se divise principalement en trois sections. Pour commencer, une revue de la littérature sur les programmes de simulation du givrage sera présentée. Puis, suivront un bref historique des programmes précédemment développés ainsi qu'un aperçu du programme CANICE qui doit être remplacé. Cette revue expliquera aussi les différents algorithmes et schémas permettant de résoudre les systèmes d'équations qui sont au coeur du programme de givrage. Le chapitre suivant décrira en détail les méthodes de résolution retenues afin de procéder au développement du solveur de gouttelettes et du solveur thermodynamique. Un bref aperçu des modules existants, tel que NSCODE, sera fait.

Après avoir discuté du développement du programme bidimensionnel, le troisième chapitre détaillera le fonctionnement du programme et son extension en 2.5D à l'aide du modèle d'aile infinie en flèche. Deux modèles permettant de simuler l'effet de la flèche à l'aide d'un programme bidimensionnel seront montrés. Des résultats comparant ces modèles à des résultats 2.5D et 3D seront ensuite discutés.

Enfin, la conclusion présentera une synthèse du présent mémoire ainsi que les limites du programme développé. Des améliorations seront aussi proposées pour la poursuite de travaux futurs.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

### 2.1 Historique des programmes de givrage

Le givrage sur les avions est l'objet d'études depuis la fin des années 20, mais c'est la Seconde Guerre Mondiale qui a accéléré les recherches sur ce sujet, principalement afin de développer des systèmes de protection contre le givrage. À cette époque, la première soufflerie de recherche sur le givrage fut construite au centre de recherche Lewis de la NASA (Potapczuk et Reinmann, 1991). Les travaux de l'époque étaient concentrés sur l'expérimentation et c'est à partir des années 70 seulement que les simulations numériques de givrage sont devenues de plus en plus présentes. On note d'ailleurs de nombreux cas d'accidents causés par l'accumulation de glace sur les avions, entre les années 70 et 90 (Cebeci *et al.*, 2005). Cependant, les raisons principales de l'augmentation de la recherche en givrage au début des années 90 furent trois axes majeurs sans lien avec les accidents de l'aviation civile (Potapczuk et Reinmann, 1991) :

- La prévision de l'accumulation de glace sur des avions militaires afin de permettre à ces avions d'opérer dans des conditions extrêmes tout en minimisant la taille de leurs systèmes d'antigivrage ;
- Le développement de systèmes de protection plus efficaces pour s'adapter aux moteurs de plus en plus performants d'où moins d'air chaud peut être tiré ;
- La détermination de l'effet de l'accumulation de la glace sur les surfaces aérodynamiques et sur la performance des nouveaux moteurs.

À cette époque, plusieurs programmes de givrage en deux dimensions ont vu le jour. Comme aujourd'hui, il s'agissait de calculer l'écoulement de l'air autour du profil, d'évaluer le schéma d'impact des gouttelettes sur le profil et d'en extraire la quantité et la forme de glace produite. CANICE est un bon exemple (Brahimi *et al.*, 1994) : il s'agit d'un code utilisant la méthode des panneaux pour l'écoulement de l'air, la méthode Lagrangienne pour suivre la trajectoire des gouttelettes d'eau et le modèle de Messenger pour évaluer les échanges thermodynamiques et la quantité de glace se formant sur chaque panneau. Ces méthodes seront décrites plus bas, car bien qu'elles soient de basses fidélités, ces codes 2D simples sont toujours utilisés en certification dans les compagnies aériennes telles que Bombardier Aéronautique (Pueyo *et al.*, 2007; Pueyo, 2013), malgré l'apparition de codes bidimensionnels et tridimensionnels de deuxième et troisième générations basés sur des équations aux dérivées partielles. Cette approche représente la haute fidélité et l'état de l'art en givrage.

Vers la fin des années 90, le modèle Eulérien des trajectoires des gouttelettes, développé par Bourgault *et al.* (1999) et basé sur le travail précédent de Durst *et al.* (1984), a permis le développement d’une nouvelle génération de codes tridimensionnels dont la modélisation physique était plus proche de la réalité. Cette formulation Eulérienne permet d’évaluer la vitesse et la concentration des gouttelettes dans l’air en tout point d’un domaine. Combiné à une résolution Navier-Stokes de l’écoulement de l’air, la méthode présentait un degré de versatilité inédit. Éventuellement, dans plusieurs groupes de recherches, le modèle thermodynamique de Messinger a été remplacé par un modèle basé lui aussi sur des équations aux dérivées partielles, le «Shallow Water Icing Model» (SWIM), qui pourrait se traduire par «modèle de givrage en eau peu profonde». On y réfère aussi en tant que système de Saint-Venant. Ce modèle permet de résoudre l’épaisseur de la glace et du film d’eau sur la glace en prenant en compte les caractéristiques thermodynamiques internes autant qu’externes de ces phases (Bourgault *et al.*, 2000).

Depuis, de nombreux modèles permettant de simuler différents comportements des gouttelettes ont été développés, comme les modèles pour les grosses gouttelettes surfondues et leur comportement lors de l’impact (Jung *et al.*, 2013; Honsek, 2005). Cependant, il s’agit de techniques qui permettent d’étendre légèrement les conditions où les simulations en givrage sont employées avec confiance : ces modèles ne permettent pas une amélioration majeure de la précision globale des simulations. Cependant, de récents travaux sur les algorithmes morphogénétiques d’accumulation de glace (Butnarusu *et al.*, 2015; Szilder et Yuan, 2015) montrent le potentiel de cette technique en givrage. Elle consiste à introduire du hasard dans l’accumulation de la glace, ce qui permet une certaine variation des formes de glace obtenues entre plusieurs simulations dont les paramètres sont identiques. L’idée est de s’approcher de la réalité physique, car aucune expérimentation ne donne exactement les mêmes résultats.

### 2.1.1 Détails des modules de CANICE

Élaboré à l’École Polytechnique de Montréal au début des années 90, CANICE est la version améliorée du code EQUALICE développé au préalable (Brahimi *et al.*, 1994). Il s’agit d’un logiciel destiné à Bombardier Aéronautique pour la certification en givrage de leurs avions. La version exclusive à Bombardier, CANICE-BA, a été développée en deux dimensions comme en trois et approuvée par Transport Canada en tant que simulateur de givrage pour la certification. Il est donc important de comprendre quelles sont les méthodes implémentées dans CANICE pour envisager de remplacer adéquatement ces méthodes.

L’écoulement de l’air est évalué par la méthode des panneaux. Il s’agit de discrétiser une surface par un large nombre de panneaux de forme quadrilatérale. Un exemple de discrétisation

sation est montré à la figure 2.1. Sur chaque panneau, un ou plusieurs types de singularités sont fixés, parmi lesquels les sources, les vortex et les doublets. La force de chaque singularité est déterminée en résolvant les conditions limites associées à la géométrie. La position des singularités et leur force permettent d'évaluer la vitesse induite à chaque panneau et ainsi de calculer la portance (Bertin et Cummings, 2009). La procédure ne demande pas beaucoup de temps de calcul et est donc efficace, même pour des domaines tridimensionnels. Cependant, il s'agit d'une méthode de basse fidélité qui n'a pas la précision d'une solution de Navier-Stokes.

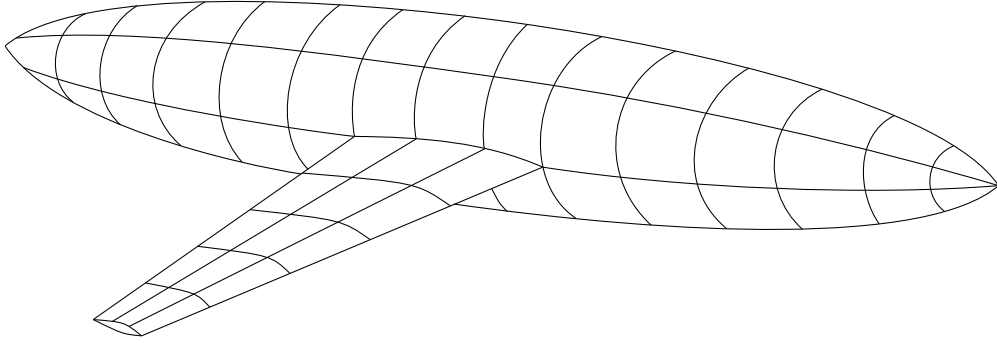


Figure 2.1 Exemple d'un maillage pour la méthode des panneaux.

La trajectoire des gouttelettes est déterminée par une approche Lagrangienne. Les gouttelettes sont considérées individuellement et les équations du mouvement sont employées pour déterminer à chaque intervalle de temps la direction de la gouttelette et son déplacement dans cette direction. Les gouttelettes sont injectées dans le domaine à partir d'une grille à intervalles définis. Le taux de captation des gouttelettes  $\beta$  sur la surface est déterminé par le rapport entre la distance initiale séparant les gouttelettes sur la grille et leur distance finale sur la surface, si elles sont entrées en contact avec la surface (Brahimi *et al.*, 1994). Une moyenne peut être effectuée afin d'obtenir le flux d'eau net sur la paroi de chaque volume de contrôle, bien que cela entraîne alors une perte de précision. La méthode Lagrangienne de suivi des particules d'eau nécessite aussi que le positionnement de la grille où sont lancées les gouttelettes soit adéquat. Cela demande parfois un processus d'essai erreur pour déterminer les bons paramètres d'entrée (Bourgault *et al.*, 1999), bien que certains codes puissent être automatisés dans l'industrie. De plus, les gouttelettes peuvent se perdre dans les zones de recirculation d'air, ce qui mène à l'échec de la simulation, et il est difficile, sinon impossible dans plusieurs cas, de simuler des ailes à géométries multiples (Hasanzadeh, 2014).

Le taux de croissance de la glace et le ruissellement de l'eau sont déterminés par un modèle de Messinger standard. Ce modèle repose sur les bilans de masse et d'énergie effectué dans des volumes de contrôle sur la frontière solide du domaine. Plusieurs paramètres sont évalués au moyen de relations empiriques, comme le coefficient de transfert de chaleur convectif. Le

flux d'eau de ruissellement est orienté en fonction du point de stagnation du profil (Fortin *et al.*, 2006). Lorsqu'il y a plusieurs points de stagnation, dans une géométrie complexe, seul le plus fort est considéré, ce qui écarte le modèle de la réalité physique. L'utilisation de relations empiriques est la plus grande lacune de ce modèle, ce qui en fait le point faible des programmes de givrage en général (Cebeci *et al.*, 2005).

### 2.1.2 Historique au sein du groupe de recherche

Afin de comprendre certains choix effectués à l'intérieur du projet, il est important de le situer comme découlant de deux modifications majeures du programme CANICE (Hasanzadeh *et al.*, 2012, 2013a). Après le remplacement de la méthode des panneaux et du mailleur par des modules développés par le groupe de recherche, la suite logique était de remplacer aussi la méthode lagrangienne et le modèle thermodynamique.

La figure 2.2 montre ces modifications. Les blocs en bleu correspondent aux modules originaux de CANICE, alors que les blocs en rouges sont des modules commerciaux et que les blocs en vert ont été développés par différents membres du groupe de recherche. Les flèches indiquent le transfert tel quel d'un module. La zone jaune pâle englobe les différentes versions de CANICE. On remarque que la zone jaune foncé est séparée de l'autre zone puisque le nouveau logiciel n'a aucun lien avec la version originale de CANICE. Cela a d'ailleurs mené à l'abandon du nom «CANICE» pour celui de «NSCODE-ICE».

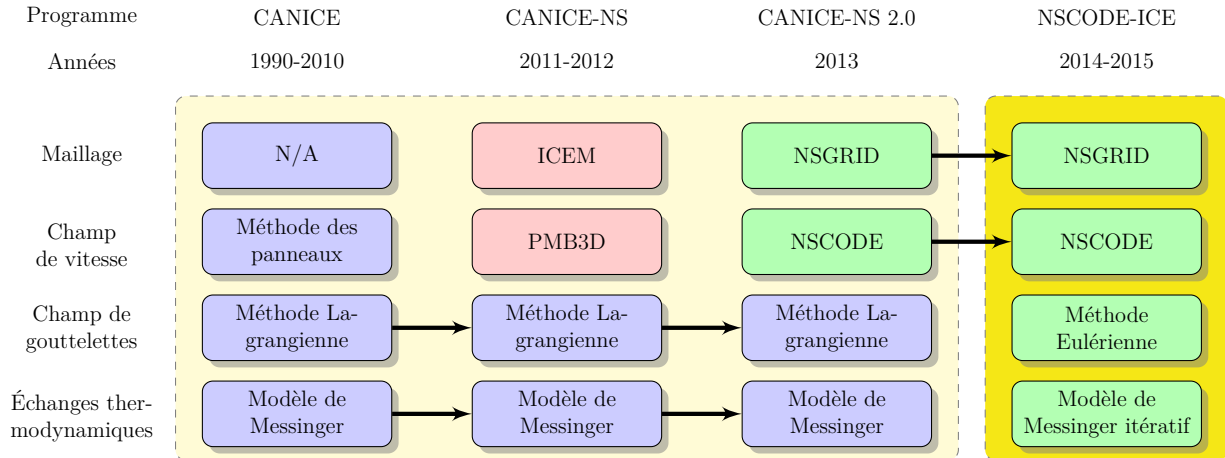


Figure 2.2 Évolution du programme de givrage développé à Polytechnique.

## 2.2 Résolution de la phase dispersée

Le système d'équations Eulérien du champ de gouttelettes permet de déterminer le champ vectoriel de la vitesse des gouttelettes ainsi que leur concentration dans l'air. Le système d'équations, présenté à l'équation (3.2) de la section 3.3, est formé de l'équation de continuité déterminant la concentration des gouttelettes et de l'équation de conservation du momentum, qui détermine le vecteur vitesse des gouttelettes (Bourgault *et al.*, 1999). Le système est donc composé de trois équations en deux dimensions et de quatre équations en trois dimensions. Il s'agit d'une différence majeure avec le système d'équations de Navier-Stokes, qui est similaire dans sa forme générale. En effet, il n'y a pas d'équation de conservation de l'énergie qui permettrait de déterminer la pression associée aux gouttelettes. De plus, il n'y a pas de flux visqueux. Ainsi le terme source est le seul élément perturbant du système. Si on l'enlève, on obtient une solution triviale où les gouttelettes ne sont pas déviées par la géométrie solide, telle que montrée à la figure 2.3 où seule la condition limite de sortie du mur montre l'effet de la convection.

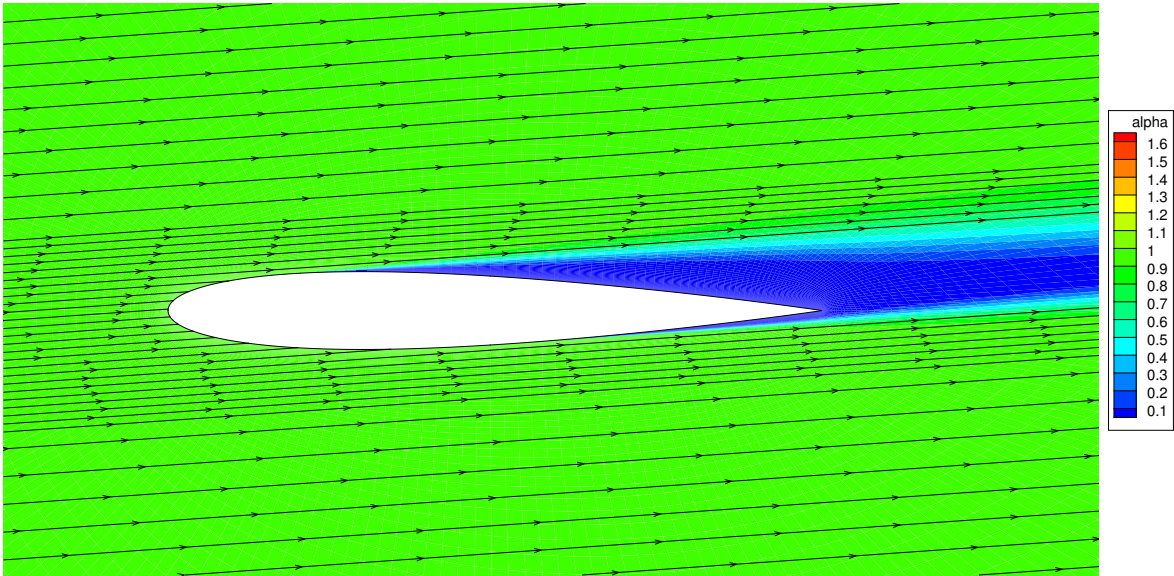


Figure 2.3 Solution triviale du système d'équations des gouttelettes.

On constate ainsi que le terme source est très important et son traitement particulier fera l'objet de la section suivante. En ce qui a trait au système d'équations lui-même, il est important d'utiliser un schéma de résolution adéquat. Il a d'abord été résolu par Bourgault *et al.* (1999) à l'aide d'un solveur implicite Newton-GMRES appliqué avec la méthode des éléments finis. Bien que donnant de bons résultats, cette technique nécessite l'ajout de termes stabilisants. Plusieurs autres études portent plutôt sur l'utilisation des volumes finis, la plupart appliquant un solveur explicite Runge-Kutta à étages multiples (Hospers et Hoeijmakers,

2010; Chengxiang *et al.*, 2012; Jung *et al.*, 2013; Pena *et al.*, 2014a). La discrétisation spatiale employée varie entre le schéma décentré en amont et le schéma centré. Or, le solveur explicite Runge-Kutta est bien adapté à une discrétisation décentrée en amont (Blazek, 2001).

Cet algorithme explicite est intéressant, car il peut facilement être amélioré en un solveur semi-implicite (Cagnone *et al.*, 2011). Cela semble approprié, car un solveur explicite est généralement limité dans sa vitesse de résolution, contrairement aux solveurs de type implicite ou semi-implicite. Certains se sont tournés vers des algorithmes implicites où le système matriciel obtenu est résolu à l'aide d'un algorithme itératif, tel que l'algorithme Stone (Pena *et al.*, 2014b). D'autres algorithmes sont disponibles pour le genre de matrice obtenue, tel que Gauss-Seidel, SOR ou BiCGStab (Saad, 2003). L'algorithme appliqué aura un impact sur la rapidité de résolution du système et sur l'efficacité générale du programme.

Toutes les recherches mentionnées précédemment sont basées sur un algorithme non couplé pour résoudre les deux phases présentes, soit l'air et les gouttelettes. Cependant, il est aussi possible de résoudre toutes les phases, incluant les échanges thermodynamiques, de façon couplée (Naterer, 2003). Dans ce cas-ci, une méthode par éléments finis basée sur les volumes de contrôles a été employée et les équations sont résolues implicitement. Cette approche est cependant plus coûteuse en temps de calcul et elle devrait être réservée aux cas où la simulation d'un écoulement instationnaire est la seule option.

### 2.3 Traitement du terme source

Comme mentionné dans la section précédente, le terme source des équations Eulériennes du champ de gouttelettes est l'élément déterminant qui perturbe la solution. Or, un fort terme source dans un système d'équations peut rendre inadéquat le solveur employé si celui-ci n'est pas adapté, car le système devient alors plus rigide (Blazek, 2001). En théorie, les termes sources volumiques sont simplement intégrés, comme montré dans l'équation (1.1) de la section 1.1.1, mais le signe de ces termes peut influencer la résolution (Lian *et al.*, 2010). En effet, en étudiant le jacobien du vecteur source et en particulier ses valeurs propres, on constatera qu'une valeur propre positive proviendra d'un terme source agissant comme une source, ce qui fait augmenter la solution, mais qu'une valeur propre négative indiquera un puit, ce qui fait plutôt diminuer la solution.

Selon Lian *et al.* (2010), une source devrait être traitée explicitement, avec un pas de temps limité, afin d'éviter une augmentation trop brusque de la solution, ce qui mène souvent à une divergence du calcul et rend le programme moins robuste. À l'inverse, un puit devrait être traité implicitement afin d'améliorer la convergence. Les auteurs suggèrent d'ailleurs



quelques techniques permettant de réaliser cette séparation du terme source et la limitation de l'incrément de temps employé pour la discrétisation temporelle (Lian *et al.*, 2009). Une nomenclature appropriée séparant les parties indépendantes et dépendantes du terme source permet de procéder simplement à cette séparation (Versteeg et Malalasekera, 2007).

## 2.4 Modèle thermodynamique

Le résultat souhaité d'une simulation de givrage est la forme de glace finale s'accumulant sur la géométrie étudiée. Le modèle thermodynamique employé aura un effet très important sur cette forme. Selon la relation déterminant le coefficient de transfert de chaleur convectif et le modèle de ruissellement de l'eau choisis, la glace formera des cornes plus ou moins proéminentes et s'accumulera sur une région plus ou moins large (Cebeci *et al.*, 2005). D'ailleurs, la modélisation du ruissellement, qui se produit lorsque la glace est de type verglas, est très complexe. En fait, la plupart des programmes les mieux connus obtiennent des résultats souvent à peine acceptables pour ce type de cas (RTO/NATO, 2001).

De nombreux programmes utilisent une variante du modèle de Messinger standard (Fortin *et al.*, 2006) afin de modéliser les échanges thermodynamiques et le ruissellement à l'aide de bilans de masse et d'énergie. D'un autre côté, des équipes de recherche se sont tournées vers les équations aux dérivées partielles pour cette fonction (Bourgault *et al.*, 2000) en considérant le film d'eau se formant sur la glace comme une phase à part ayant une épaisseur variable. Ce modèle est basé sur l'équation de l'eau peu profonde qui a été étudiée et adaptée pour être utilisée sur des géométries telles qu'un profil avec glace (Rothmayer *et al.*, 2002).

Entre ces deux extrêmes, des modèles ont été développés, tels que le modèle de Messinger étendu (Myers et Charpin, 2004) qui utilise quelques hypothèses du modèle standard afin de transformer les équations aux dérivées partielles de l'équation de l'eau peu profonde en équations aux dérivées ordinaires. Un modèle de Messinger amélioré, ou itératif, (Chengxiang *et al.*, 2012) a aussi été développé afin de considérer plusieurs points de stagnation en ajoutant une procédure itérative permettant de déterminer la direction du ruissellement d'eau en fonction du cisaillement de l'air à la surface (Wang et Rothmayer, 2009).

## 2.5 Givrage tridimensionnel

Le givrage est un phénomène naturel très complexe qui peut être modélisé en deux dimensions, ce qui entraîne toutefois la perte de nombreuses caractéristiques. Par exemple, les essais expérimentaux révèlent que même sur un profil extrudé, l'eau de ruissellement se sépare à un certain point pour se rassembler en petites rigoles qui génèrent une glace discontinue

(Waldman et Hu, 2015). À l'échelle d'un avion complet, on trouve que la flèche des ailes et des stabilisateurs, l'angle d'attaque effectif du stabilisateur horizontal et la connexion entre les différents éléments, comme le fuselage et l'aile, influencent le plus la solution de givrage. L'angle de flèche sur les ailes, entre autres, donne naissance à des formes de glace particulières, en conditions de verglas, qui rappellent la queue d'un homard. Cette glace est montrée à la figure 2.4.

La flèche est l'un des phénomènes tridimensionnels les plus faciles à modéliser et fait d'ailleurs l'objet d'une recommandation de la «Society of Automotive Engineers» (SAE) pour les simulations de givrage bidimensionnelles (SAE, 2009). Il s'agit d'appliquer le modèle de Dorsch et Brun (1953) afin de prendre en considération l'angle de flèche et ainsi éviter de surestimer l'accumulation de glace. Un modèle similaire, mais s'appliquant à une plus grande variété de surfaces que l'aile seule, a été développé par Pueyo (2013) à Bombardier Aéronautique. Ces modèles n'apportent que des corrections géométriques.

Cependant, selon des recherches récentes menées par le groupe de recherche d'Éric Laurendeau, il semble possible de simuler l'effet de la flèche sur l'écoulement de l'air en deux dimensions en appliquant l'hypothèse que l'aile en flèche est infinie et donc que les variables ne changent pas dans la direction de l'envergure (Ghassemi *et al.*, 2014). De cette façon, il est possible de résoudre la troisième équation du moment en y simplifiant des termes et de résoudre le système en 2.5D, c'est-à-dire de résoudre les trois dimensions sur une section bidimensionnelle. Le concept n'a pas encore été appliqué au givrage, mais fera l'objet du chapitre 4.



Figure 2.4 Glace sur une aile en flèche (extrait de Papadakis *et al.*, 2005).

## CHAPITRE 3 Développement du programme de givrage

### 3.1 Hiérarchie générale du programme

Le programme développé dans ce projet est basé sur un algorithme découpé. Ainsi l'écoulement de l'air, l'écoulement des gouttelettes d'eau et le taux d'accumulation de la glace sont calculés indépendamment dans trois modules principaux différents. Un module supplémentaire gère l'évolution de la géométrie due à l'accumulation de glace. Un préprocesseur s'occupe de l'allocation de la mémoire et du traitement des grilles superposées, s'il y a lieu. De plus, un mailleur génère un maillage à chaque incrément de temps. La figure 3.1 montre l'organisation hiérarchique du programme.

Les modules sont tous écrits en langage C et le programme est lancé via un fichier principal écrit en python qui appelle les fonctions C à l'aide d'une interface Fortran très compacte. Cette façon de procéder apporte de nombreux avantages :

- L'efficacité des codes écrits en C : étant de bas niveau, les calculs sont très rapides d'exécution.
- L'adaptation : le langage python étant de haut niveau, chaque utilisateur peut facilement modifier le fichier principal afin de répondre à ses besoins.
- La modularité de l'ensemble : chaque module est écrit à part et peut être utilisé sans les autres. La seule partie commune est le préprocesseur qui est réduit au minimum.

#### 3.1.1 Processus d'accumulation de glace quasi stationnaire

Lorsque l'on parle d'une simulation de givrage à plusieurs incréments de temps, disons  $n$  incréments de temps, c'est que le temps total de givrage sera divisé en  $n$  étapes. Chaque fois, il faut régénérer le maillage et évaluer l'écoulement de l'air, le champ de gouttelettes, les paramètres thermodynamiques et la nouvelle surface. Cette itération est illustrée dans la figure 3.1. Il s'agit d'un processus quasi stationnaire, car tous les modules sont évalués de façon stationnaire à chaque intervalle de temps, à l'exception de la nouvelle surface qui prend en compte l'incrément de temps afin de convertir le taux d'accumulation de glace en masse.

Lorsque l'on divise ainsi la durée du givrage, cela permet au programme de prendre en considération le changement de la géométrie, ce qui corrige en quelque sorte la direction d'accumulation de la glace. En effet, comme la frontière solide du domaine change à la suite de l'accumulation de la glace, l'écoulement de l'air et l'écoulement des gouttelettes sont modifiés, ce qui a un impact sur les paramètres thermodynamiques et sur le processus de croissance de

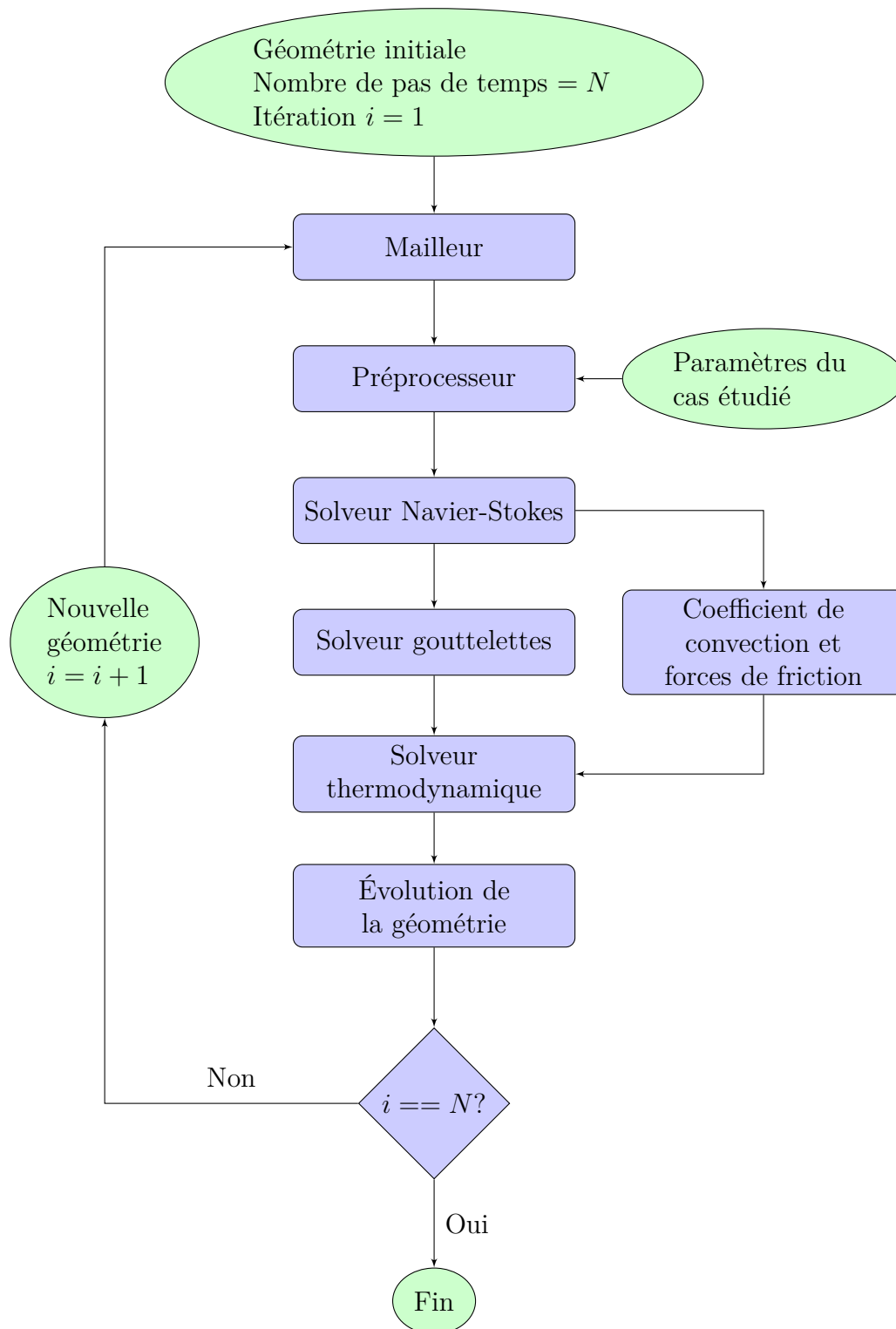


Figure 3.1 Hiérarchie du programme développé.

la glace. Cependant, la nouvelle solution de chacun de ces systèmes n'est pas influencée par la solution précédente, puisqu'ils sont tous résolus sans considération temporelle. Seulement

quelques incréments de temps suffisent au programme pour que la solution s'approche beaucoup plus des formes obtenues expérimentalement. Ce changement radical lorsque quelques incréments de temps sont ajoutés rappelle le comportement d'une solution non convergée, donc il semble nécessaire d'utiliser le nombre adéquat d'itérations temporelles afin d'obtenir une géométrie finale convergée.

Comme il sera présenté à la section 3.6, lorsqu'on augmente le nombre d'incrémentes de temps, on obtient une convergence en temps. Or, dans une telle situation, le début du processus de convergence entraîne rapidement un changement de solution, changement qui diminue progressivement jusqu'à devenir nul lorsque la solution est convergée.

## 3.2 Modules existants

Le programme développé est composé de nombreux modules, comme le montre la figure 3.1. Cependant, ce projet se concentre sur le givrage lui-même et s'appuie sur des modules développés par d'autres membres du groupe de recherche. Ces modules sont le mailleur, le solveur Navier-Stokes et le préprocesseur chimère, qui permet de travailler avec des grilles superposées. Ces modules sont détaillés ci-après.

### 3.2.1 Générateur de maillage

Le maillage est un élément clé de la plupart des simulations en dynamique des fluides, mais c'est d'autant plus vrai en givrage. En effet, la qualité de la grille aura un effet non seulement sur la solution de l'écoulement mais aussi sur le champ de gouttelettes et les propriétés thermodynamiques. Il est donc essentiel d'avoir un bon générateur de maillage, surtout lorsqu'on procède à des simulations à plusieurs intervalles de temps. En effet, les géométries complexes qui sont obtenues lors de ces simulations sont difficiles à mailler étant donné la présence d'arêtes vives et de zones concaves et convexes se succédant.

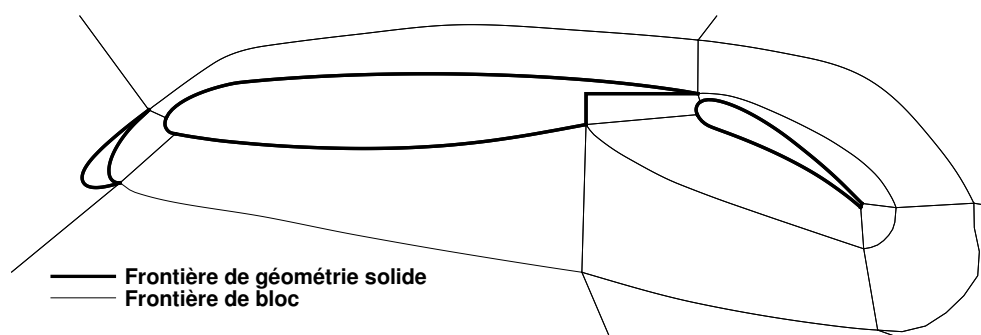
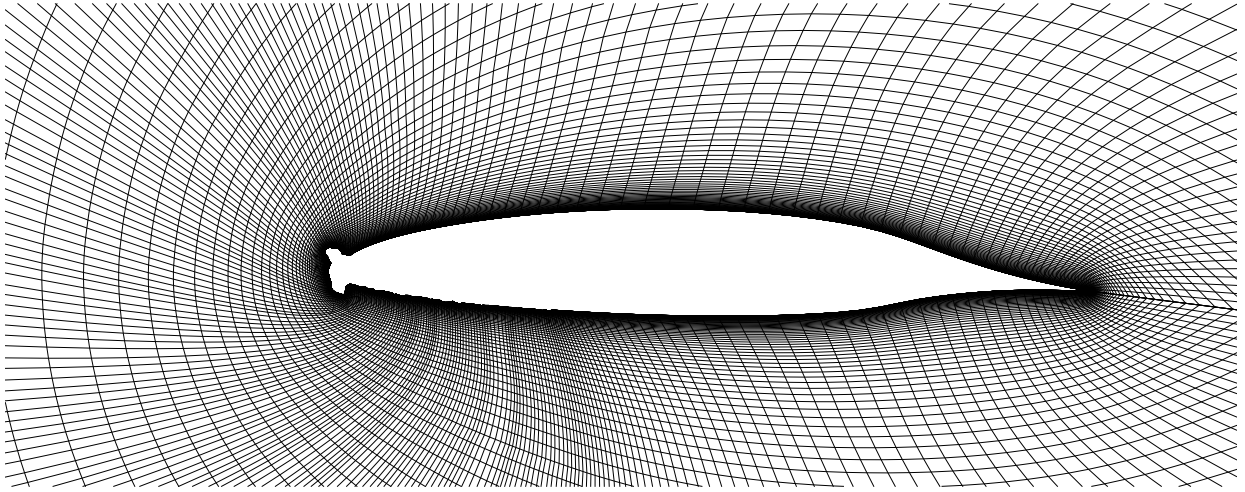
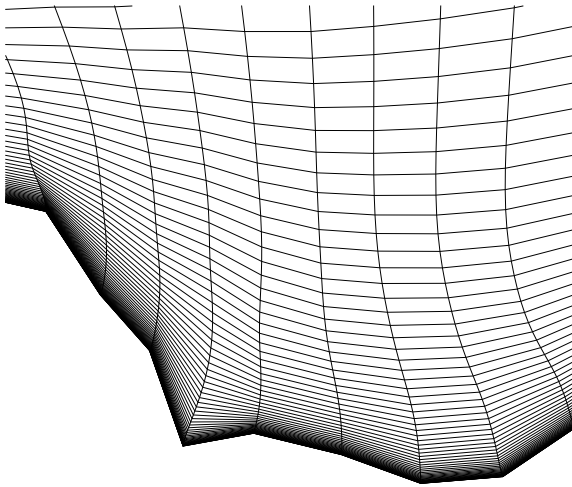


Figure 3.2 Maillage d'une aile composée de plusieurs éléments.

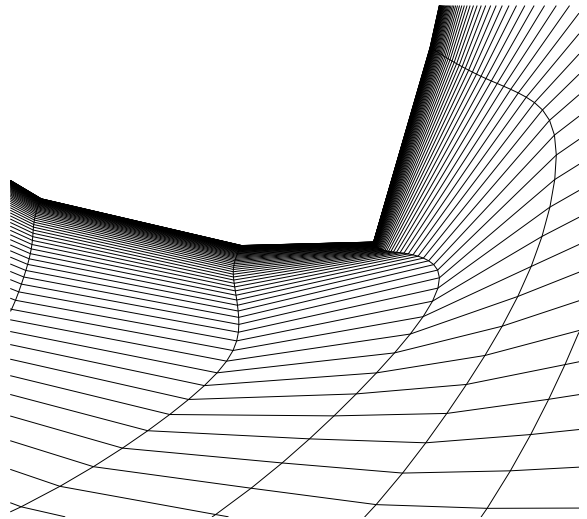
Le mailleur utilisé dans ce projet est NSGRID (Hasanzadeh *et al.*, 2015), un mailleur développé à l'École Polytechnique de Montréal afin de répondre aux exigences des simulations de givrage. Il s'agit d'un mailleur structuré qui peut générer des maillages en plusieurs blocs, tel que montré à la figure 3.2. Sa particularité est l'approche novatrice de son lisseur qui combine plusieurs méthodes afin de contrôler la taille des cellules proches des parois ainsi que l'orthogonalité aux parois. Ce mailleur permet aussi de modifier la disposition des noeuds le long des parois en fonction de la courbure, ce qui est essentiel sur des géométries complexes avec accumulation de glace.



(a) Maillage d'un profil avec glace, 257x129.



(b) Vue rapprochée d'une région avec cavités.



(c) Vue rapprochée d'une arête vive.

Figure 3.3 Exemple de maillage généré.

La technique employée afin de combiner les méthodes de Sorenson (1980) et de Spekreijse

(1995) avec une approche parabolique est de passer de l’espace topologique à l’espace paramétrique, où les solutions des différentes méthodes sont combinées, et ensuite seulement à l’espace physique (Hasanzadeh *et al.*, 2015). Cela donne une excellente qualité de maillage, comme illustré aux figures 3.3(b) et 3.3(c) qui présentent plusieurs vues rapprochées du maillage d’une géométrie avec glace de la figure 3.3(a).

### 3.2.2 Solveur Navier-Stokes

Le module résolvant l’écoulement de l’air dans le programme développé est NSCODE (Pigeon *et al.*, 2014), un solveur RANS développé en tant que plateforme de recherche à l’École Polytechnique de Montréal par l’équipe du professeur Éric Laurendeau. Il s’agit d’un solveur bidimensionnel basé sur les maillages structurés en plusieurs blocs ainsi que les grilles superposées. Plusieurs modèles de turbulence y sont implémentés :  $S - A$ ,  $K - \omega$  et  $\gamma - Re_\theta$ .

Les équations de Navier-Stokes, qui sont présentées plus bas, sont résolues à l’aide de trois solveurs distincts, les deux premiers ayant servi d’inspiration pour le solveur des gouttelettes tels que montré à la section 3.3 :

- Solveur explicite Runge-Kutta ;
- Solveur semi-implicite Runge-Kutta ;
- Solveur implicite LU-SGS.

Le système d’équations de Navier-Stokes dictant l’écoulement d’un fluide s’écrit sous forme intégrale pour un élément de surface  $\Omega$  (Blazek, 2001) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega \quad (3.1)$$

Où  $\mathbf{W}$  est le vecteur des variables conservatives de l’air,  $\mathbf{F}_c$  est le vecteur des flux convectifs,  $\mathbf{F}_v$  est le vecteur des flux visqueux et  $\mathbf{Q}$  est le vecteur des termes sources, qui est généralement nul dans le cas de simulations aérodynamiques standards. Étant donné que le système d’équations de Navier-Stokes n’est pas l’objet principal de ce projet, le lecteur souhaitant plus de détails quant à ces équations est référé à Blazek (2001).

### 3.2.3 Préprocesseur chimère

Le terme chimère est le nom fréquemment utilisé pour discuter de la technique des maillages superposés. Comme son nom l’indique, cette technique permet de superposer des grilles et de résoudre des équations dans les zones de superposition en interpolant certaines cellules en fonction d’un critère quelconque. Le préprocesseur développé par l’équipe (Lévesque *et al.*,

2015) est basé sur une interpolation bilinéaire et sur un critère de distance à la paroi afin de déterminer les frontières où interpoler les cellules d'un maillage par rapport à un autre. Un exemple de maillages superposés avec les frontières d'interpolation mises en évidence est illustré à la figure 3.4, avec le profil McDonnell Douglas (Petrosino *et al.*, 2011). Le préprocesseur est évalué une fois pour chaque ensemble de maillage et les facteurs d'interpolations sont conservés pendant toutes les itérations des différents solveurs, diminuant ainsi grandement le temps de calcul associé à la technique chimère.

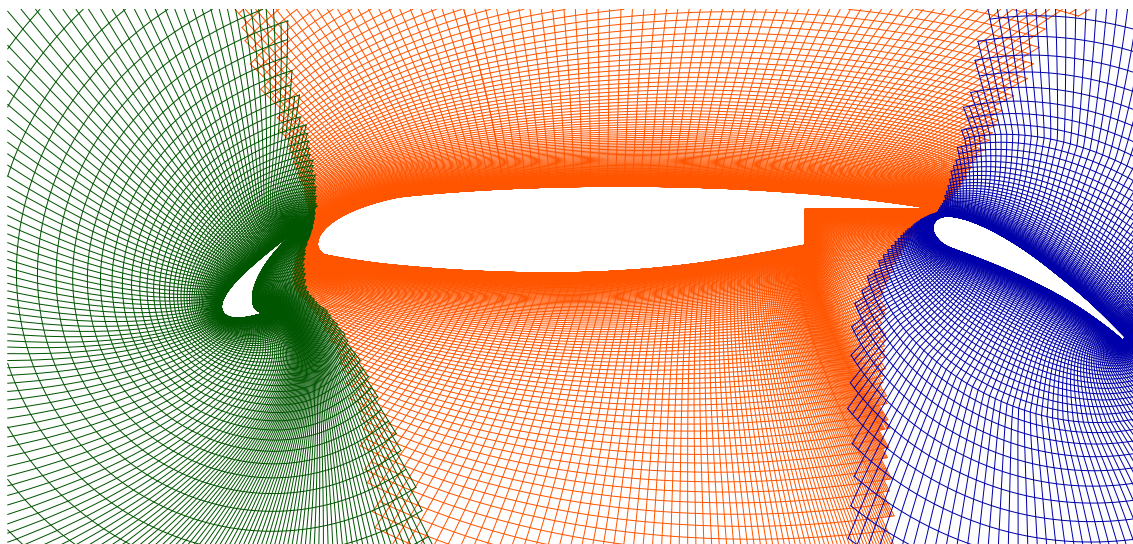


Figure 3.4 Exemple de maillages superposés traités avec la technique chimère.

L'utilité première de cette technique est de faire des simulations sur des géométries à plusieurs éléments. Ainsi chaque élément est maillé indépendamment et les grilles conservent donc une bonne qualité. La technique est aussi employée pour des simulations où certains éléments sont en mouvement ou pour des optimisations (Lévesque *et al.*, 2015). Dans le cas du givrage, l'intérêt de la technique chimère est de limiter la zone de remaillage lors d'incrément de temps successifs en maillant seulement la forme de glace obtenue et en superposant cette forme au maillage de la géométrie initiale. Cependant, au sein du projet, l'utilisation de la technique chimère est limitée à la résolution sur plusieurs éléments et tous les maillages sont alors remaillés entièrement, puisque la technique permettant l'interaction solide à solide est actuellement en développement. En effet, pour que seule la glace puisse être remaillée, le croisement entre une frontière d'interpolation et une frontière de type mur doit être pris en compte, et l'interpolation doit s'effectuer automatiquement.



### 3.3 Solveur du champ de gouttelettes

Le système d'équations des gouttelettes sous forme Eulérienne est basé sur l'équation de transport générique (1.1) présentée plus tôt. La particularité de ces équations par rapport à celles d'Euler est l'absence de flux diffusifs, qui sont remplacés par des termes sources très forts représentant les forces externes de traînée et de gravité. C'est dans le terme source de traînée qu'intervient principalement l'écoulement de l'air. Quelques hypothèses sont nécessaires pour que le système soit cohérent (Bourgault *et al.*, 1999) :

- Les gouttelettes sont parfaitement sphériques.
- Il n'y a pas de collision entre les gouttelettes ni de rebond sur la surface d'impact.
- Les gouttelettes ne se brisent pas lors de l'impact et n'éclaboussent donc pas les volumes de contrôles adjacents.
- Il n'y a pas d'échange thermique ou turbulent entre l'air et les gouttelettes.
- Les seules forcent agissant sur les gouttelettes sont la traînée et la gravité.

#### 3.3.1 Définition des équations 2D

Le système d'équations dans sa forme adimensionnelle conservative est présenté plus bas (Bourgault *et al.*, 1999), avec l'équation de continuité et l'équation du momentum :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}_d) = 0 \\ \frac{\partial \alpha \vec{u}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}_d \otimes \vec{u}_d) = \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha (\vec{u}_a - \vec{u}_d) + \alpha \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \frac{\vec{g}}{Fr^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans l'équation (3.2), on retrouve la fraction volumique d'eau,  $\alpha$ , et le vecteur vitesse des gouttelettes,  $\vec{u}_d$ , qui représentent les variables primitives de l'écoulement des gouttelettes. Il faut noter que ces variables sont adimensionnelles pour simplifier les calculs numériques. Ainsi  $\alpha$  correspond à la teneur en eau liquide locale divisée par la teneur en eau liquide à l'infini en amont, qui s'écrit *LWC* pour «Liquid Water Content». Le vecteur vitesse  $\vec{u}_d$  est, quant à lui, obtenu par la division de la vitesse locale par la vitesse du son modifiée  $\tilde{U}_\infty = \sqrt{R_{air} T_\infty}$ . L'utilisation de cette vitesse du son modifiée permet, dans le solveur NSCODE, de faciliter certains calculs compressibles. Par souci de cohérence, cette adimensionnalisation a été transposée au solveur de gouttelettes.

Les deux termes sources de l'équation du momentum sont le terme de traînée et le terme de gravité. Le second terme ne s'applique que dans la direction du vecteur de gravité,  $\vec{g}$ , qui pointe dans la direction  $y$  dans la plupart des cas. Il s'agit d'un terme plutôt faible par

rapport à la traînée dans les simulations en vol lorsque les gouttelettes sont petites, mais il prend plus d'importance dans les simulations de manoeuvre au sol, comme le taxi par exemple, ce qui explique sa présence (Bourgault *et al.*, 1999) ou lorsqu'un cas de grosses gouttelettes surfondues est simulé. On y retrouve la densité dimensionnelle locale de l'air,  $\rho_a$ , la densité de l'eau,  $\rho_w$ , et le nombre de Froude, un nombre adimensionnel défini par  $Fr$ . Le terme de traînée, quant à lui, exploite le nombre de Reynolds local de l'écoulement,  $Re_d$ , le coefficient de traînée des gouttelettes,  $C_D$  et un paramètre d'inertie  $K$ . On y voit aussi le rôle de l'écoulement d'air par la présence du vecteur vitesse de l'air,  $\vec{u}_a$ .

Les trois paramètres adimensionnels  $K$ ,  $Fr$  et  $Re_D$  sont définis comme suit :

$$K = \frac{\rho_w MVD^2 \tilde{U}_\infty}{18\mu_a \bar{c}} \quad ; \quad Fr^2 = \frac{\tilde{U}_\infty^2}{g\bar{c}} \quad ; \quad Re_d = \frac{\rho_a \|\vec{u}_a - \vec{u}_d\| MVD}{\mu_a} \quad (3.3)$$

Où  $MVD$  est l'acronyme de «Median Volumetric Diameter» en anglais et représente le diamètre médian des gouttelettes d'eau en se basant sur une séparation de la masse en deux,  $\mu_a$  est la viscosité dynamique de l'air et  $\bar{c}$  est la corde aérodynamique moyenne de l'aile.

Le modèle employé pour évaluer le coefficient de traînée est défini plus bas (Honsek, 2005).

$$C_D = \begin{cases} \frac{24(1 + 0.15Re_d^{0.687})}{Re_d} & \text{si } Re_d < 1300. \\ 0.4 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

Les conditions frontières associées à ces équations sont en partie similaires aux conditions limites des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire que la condition limite de champ lointain, ou «farfield», est similaire. Si l'écoulement entre dans le domaine, les valeurs à l'infini sont imposées. Par contre, si l'écoulement sort du domaine, un flux nul sera imposé. Cependant, la condition de mur est très différente. En effet, si l'écoulement sort du domaine en heurtant le mur, un flux nul sera imposé, alors que si l'écoulement entre dans le domaine en «sortant» du mur, des valeurs nulles seront imposées aux variables primitives des gouttelettes.

Le flux de gouttelettes est évalué à l'aide d'un paramètre adimensionnel  $\beta$  qui représente le taux de captation des gouttelettes. Il permet de calculer le flux de gouttelettes frappant la surface tout en représentant un élément de comparaison entre les cas, sa valeur allant de 0 à 1 inclusivement.

$$\beta = -\frac{\alpha \vec{u}_d \cdot \vec{n}}{Ma_\infty \sqrt{\gamma}} \quad (3.5)$$

$$\dot{m}_{imp} = LWC U_\infty \beta$$

Où  $Ma_\infty$  est le nombre de Mach de l'écoulement à l'infini et  $\gamma$  le coefficient adiabatique de l'air. La raison de la division par ces deux constantes est l'adimensionnalisation des équations. Il s'agit en fait de corriger  $\vec{u}_d$  pour que le vecteur vitesse soit adimensionnel par rapport à  $U_\infty$ , la vitesse de l'écoulement à l'infini, plutôt que par  $\tilde{U}_\infty$ , la vitesse du son modifiée présentée plus haut.

Ces équations et leurs conditions limites sont résolues à l'aide de trois schémas numériques distincts : Un schéma explicite Runge-Kutta, un schéma semi implicite Runge-Kutta et un schéma d'Euler implicite.

### 3.3.2 Solveur explicite Runge-Kutta

Le solveur explicite Runge-Kutta à cinq niveaux de Jameson (1985) a été sélectionné pour amorcer le développement parce qu'il était déjà utilisé dans le solveur NSCODE (Pigeon *et al.*, 2014). Il découle de la linéarisation du système d'équations sous sa forme vectorielle. Si l'on regroupe les différents composants de façon vectorielle, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{R}(\mathbf{W}) = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} \quad (3.6)$$

Où  $\mathbf{W}$  est le vecteur des variables conservatives avec son changement de variable,  $\mathbf{E}$  est le vecteur des flux convectifs associés à  $u_d$  et  $\mathbf{F}$  est le vecteur des flux convectifs associés à  $v_d$ .

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha u_d \\ \alpha v_d \end{Bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \alpha u_d \\ \alpha u_d^2 \\ \alpha u_d v_d \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \alpha v_d \\ \alpha u_d v_d \\ \alpha v_d^2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$\mathbf{S}$  est le terme source :

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{l} 0. \\ \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha (u_a - u_d) \\ \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha (v_a - v_d) - \alpha \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \frac{1}{Fr^2} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

La méthode consiste d'abord à intégrer l'équation (3.6) par rapport au domaine de chaque cellule, selon un développement similaire à celui détaillé par Cebeci *et al.* (2005) pour les équations de Navier-Stokes.

Le membre de gauche devient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dx dy &= \frac{\partial \mathbf{W}_{i,j}}{\partial t} \Omega_{i,j} \\ &= \frac{\partial \mathbf{W}_{i,j}}{\partial t} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.9)$$

Et le membre de droite devient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{i,j}} \left[ -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} \right] dx dy &= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[ -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} \right] dx dy \\ &= - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (\mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{E}_{i-1/2}) dy - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}) dx + \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\mathbf{S}_{i,j}) dx dy \\ &= -(\mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{E}_{i-1/2}) \Delta y - (\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}) \Delta x + \mathbf{S}_{i,j} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.10)$$

En les combinant et en divisant par  $\Delta x \Delta y$  de chaque côté, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d\mathbf{W}_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{E}_{i-1/2}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{\Delta y} + \mathbf{S}_{i,j} \quad (3.11)$$

Les termes en  $i + 1/2$ ,  $i - 1/2$ ,  $j + 1/2$  et  $j - 1/2$  représentent respectivement les faces est, ouest, nord et sud des cellules. Une notation courante illustrée à la figure 3.5 est de désigner

par des lettres minuscules les faces et par des lettres majuscules les cellules voisines, la cellule active étant quant à elle désignée par un  $P$  majuscule.

		N	
	O	n o P e s	E
		S	

Figure 3.5 Nomenclature des faces et des voisins d'une cellule active.

Comme l'algorithme est développé à l'aide d'une formulation centrée sur les cellules, les variables n'existent pas numériquement aux faces. Il faut donc les approximer avec un schéma de discrétisation. Le schéma décentré en amont, ou «upwind» en anglais, est celui qui semble le plus adapté aux équations des gouttelettes par leur caractère exclusivement convectif. Il s'agit d'approximer les variables à une face par les variables centrées situées en amont dans l'écoulement, ce qui revient à transporter ces valeurs par convection uniquement. Par exemple, si l'écoulement va de l'ouest vers l'est, les variables à la face  $i - 1/2$  seront approximées par celles centrées sur la cellule située à l'ouest de la cellule active.

Sous forme compacte, l'équation (3.11) s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{W}_{i,j}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{W}) \quad (3.12)$$

On peut maintenant appliquer le schéma du solveur Runge-Kutta à cinq étages sous forme compacte (Cagnone *et al.*, 2011) afin de procéder à l'intégration temporelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^0 &= \mathbf{W}^n \\ \mathbf{W}^{k+1} &= \mathbf{W}^0 - \alpha_k \frac{\Delta t}{V} \mathbf{R}(\mathbf{W}^k), \quad k = 0, 4 \\ \mathbf{W}^{n+1} &= \mathbf{W}^5 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Où les termes  $\alpha_k$  sont les coefficients de Martinelli (1987) pour cinq étages. L'incrément de temps employé est déterminé par la condition locale de Courant-Driedrichs-Lewy (CFL) et dépend des valeurs propres du système.

### 3.3.3 Solveur Runge-Kutta semi-implicite

Afin d'améliorer la vitesse de convergence du solveur explicite Runge-Kutta, une méthode semi-implicite a été implémentée. Il s'agit d'ajouter un préconditionneur «point-Jacobi» dans l'algorithme (3.13) (Cagnone *et al.*, 2011), qui devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^0 &= \mathbf{W}^n \\ \mathbf{W}^{k+1} &= \mathbf{W}^0 - \alpha_k \omega [\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{W}^k), \quad k = 0, 4 \\ \mathbf{W}^{n+1} &= \mathbf{W}^5\end{aligned}\tag{3.14}$$

La matrice  $D$  est une matrice diagonale par bloc, c'est-à-dire que chaque élément de la diagonale de la matrice contient en fait une matrice carrée de dimension trois. Le fait qu'il n'y ait que la diagonale de remplie explique le caractère partiellement implicite de la méthode. Une matrice pleine aurait représenté un schéma implicite. Chaque bloc trois par trois est le jacobien du système d'équations discrétisées (3.11) ajouté à la même condition locale de CFL que le solveur explicite, mais multipliée par la matrice identité  $I$  pour n'avoir un effet que sur la diagonale principale du système. On peut séparer ce jacobien de façon linéaire en évaluant le jacobien de  $\mathbf{E}$ , de  $\mathbf{F}$  et de  $\mathbf{S}$  indépendamment. De façon générale :

$$[\mathbf{D}] = \frac{\Delta t}{V} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}}\tag{3.15}$$

Où le jacobien est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \left( -\frac{\mathbf{E}_{i+1/2} - \mathbf{E}_{i-1/2}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{\Delta y} + \mathbf{S}_{i,j} \right) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{i+1/2} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{i-1/2} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{j+1/2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{j-1/2} \right) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{i,j}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Où les composants du jacobien convectif sont :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u_d^2 & 2u_d & 0 \\ -u_d v_d & v_d & u_d \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_d v_d & v_d & u_d \\ -v_d^2 & 0 & 2v_d \end{bmatrix}\tag{3.17}$$

Et le jacobien du terme source est :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_D Re_d}{24K} u_a & -\frac{C_D Re_d}{24K} & 0 \\ \frac{C_D Re_d}{24K} v_a - \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w}\right) \frac{1}{Fr^2} & 0 & -\frac{C_D Re_d}{24K} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

L'utilisation du jacobien comme préconditionneur permet généralement d'accélérer la convergence du calcul en tenant compte de la variation de la solution en fonction de chaque variable. Cependant, dans le cas du système d'équations des gouttelettes, l'utilisation du jacobien directement mène à un système instable et le CFL utilisé doit être considérablement réduit pour que la convergence soit atteinte, ce qui rend ce solveur moins performant que le solveur explicite. La raison se trouve dans les valeurs propres du système convectif. Ces valeurs propres sont toutes égales à  $\vec{u}_d \cdot \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur normal d'une face, ce qui rend le système instable lorsque la vitesse locale est proche de zéro. L'ajout d'un limiteur, tel que recommandé par Cagnone *et al.* (2011), n'a pas réglé ce problème.

Une solution est d'introduire de nouveaux termes de chaque côté de l'équation (3.2) qui s'annulent analytiquement et numériquement mais qui changent les valeurs propres du système. Le système modifié devient (Jung *et al.*, 2013) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}_d) = 0 \\ \frac{\partial \alpha \vec{u}_d}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \alpha \vec{u}_d \otimes \vec{u}_d + \frac{\alpha}{\tilde{Fr}^2} \right) = \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha (\vec{u}_a - \vec{u}_d) + \alpha \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \frac{\vec{g}}{Fr^2} + \nabla \cdot \left( \frac{\alpha}{\tilde{Fr}^2} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

Où  $\tilde{Fr}$  est un nombre de Froude défini avec le diamètre des gouttelettes tel que :

$$\tilde{Fr}^2 = \frac{\tilde{U}_\infty^2}{gMVD} \quad (3.20)$$

Avec ce système, les composantes du jacobien convectif deviennent :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u_d^2 + \frac{1}{\tilde{Fr}^2} & 2u_d & 0 \\ -u_d v_d & v_d & u_d \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_d v_d & v_d & u_d \\ -v_d^2 + \frac{1}{\tilde{Fr}^2} & 0 & 2v_d \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Et les valeurs propres changent pour donner trois valeurs différentes :

$$\lambda_1 = \vec{u}_d \cdot \vec{n} \quad \lambda_2 = \vec{u}_d \cdot \vec{n} - \frac{||\vec{n}||}{\tilde{F}r} \quad \lambda_3 = \vec{u}_d \cdot \vec{n} + \frac{||\vec{n}||}{\tilde{F}r} \quad (3.22)$$

Cette modification, bien que ne changeant rien à la solution finale, stabilise le système et permet d'accélérer la convergence comme prévu. Cependant, comme il sera montré plus bas, l'efficacité du solveur semi-implicite reste assez faible et, dans plusieurs cas complexes, le solveur diverge. Cela ne remplit pas le critère de robustesse qui est essentiel au programme. Un autre type de solveur doit donc être appliqué.

### 3.3.4 Solveur implicite Euler

Selon la littérature (Lian *et al.*, 2010), un terme source fortement négatif, ce qui correspond bien au terme source de la traînée dans le système (3.2), devrait être traité implicitement. Un solveur implicite est donc implémenté dans le programme. Le schéma sélectionné est le schéma d'Euler implicite (Ferziger et Peric, 1996). D'ailleurs, Peric mentionne que ce schéma devrait être choisi lorsque la stabilité est la caractéristique recherchée dans un schéma de solveur.

Le principe d'un solveur implicite est d'inverser la matrice jacobienne complète et de résoudre ainsi le système d'équations. Cependant, le schéma d'Euler implicite utilise une formulation directe de la matrice à inverser qui ne passe pas par l'évaluation du jacobien. En fait, les variables conservatives dans l'équation discrétisée sont évaluées à l'itération suivante et placées dans le terme de gauche où une matrice est formée. Cette matrice est inversée à l'aide d'une méthode itérative BiCGstab (Saad, 2003).

Le schéma d'Euler implicite découle de l'application des volumes finis en transformant l'intégrale du terme convectif de l'équation (1.1) en une somme des flux à chaque face d'un volume de contrôle, tel que mentionné dans la section 1.1.2. Le terme temporel est, quant à lui, discrétisé à l'aide d'une différence finie avant. On obtient ainsi pour le système d'équations des gouttelettes :

$$\frac{\mathbf{W}_P^{n+1} - \mathbf{W}_P^n}{\Delta t} + \sum_{m=1}^4 [\mathbf{W}_m^{n+1} (\vec{u}_d \cdot \vec{n})_m] = \mathbf{S} \quad (3.23)$$

$$A_P \mathbf{W}_P^{n+1} + A_o \mathbf{W}_o^{n+1} + A_e \mathbf{W}_e^{n+1} + A_s \mathbf{W}_s^{n+1} + A_n \mathbf{W}_n^{n+1} = \mathbf{B}_P$$

On introduit une nomenclature particulière afin d'écrire le terme source (3.8) en séparant la portion dépendante de la portion indépendante (Versteeg et Malalasekera, 2007), de sorte



que la partie dépendante puisse être introduite dans la matrice plus facilement.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}_u - \mathbf{S}_P \left( \mathbf{W}_P^{n+1} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha^n u_a \\ \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha^n v_a - \alpha^n \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \frac{1}{Fr^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_D Re_d}{24K} u_d^{n+1} \\ \frac{C_D Re_d}{24K} v_d^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Suivant cette nomenclature et la discrétisation spatiale à l'aide du schéma décentré en amont, les termes de l'équation (3.23) s'écrivent comme suit sous forme scalaire :

$$\begin{aligned} A_m &= \min(F_m, 0) \\ A_P &= \sum (F_m) - \sum (A_m) + \frac{\Omega}{\Delta t} + S_P \\ &= \sum (\max(F_m, 0)) + \frac{\Omega}{\Delta t} + S_P \\ B_P &= \frac{\Omega}{\Delta t} \mathbf{W}_P^n + S_u \end{aligned} \quad (3.25)$$

Où l'indice  $m$  correspond aux quatre voisins  $o, e, s, n$ ,  $F$  correspond au produit scalaire  $\vec{u}_d \cdot \vec{n}$  évalué au temps  $n$  à la face correspondante.

Cette équation forme un système  $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$  où on obtient la solution en inversant la matrice  $A$ . Cependant, dans le cas du système d'équations des gouttelettes, une telle matrice  $A$  serait une matrice par bloc, par conséquent très difficile à inverser, même itérativement. Par contre, en étudiant le système formé, on s'aperçoit que les trois équations peuvent être résolues via un algorithme découplé ou couplé dans un seul sens. En fait, les variables  $u_d$  et  $v_d$  au temps  $n + 1$  n'affectent pas la solution de l'équation de continuité et la réciproque est vrai entre chaque équation.

Ainsi peut-on résoudre chaque équation séparément avec une matrice creuse formée de cinq bandes diagonales seulement. De plus, les matrices sont identiques à l'exception de l'ajout du terme source dépendant dans les équations du momentum. Cela réduit la complexité du problème et permet de sauver du temps de calcul et de l'espace de stockage lors de la construction des matrices. L'algorithme de résolution employé pour résoudre ce système est l'algorithme itératif BiCGstab (Saad, 2003), qui est robuste et performant.

### 3.3.5 Vérification de l'ordre de précision

L'ordre de précision du solveur du champ de gouttelettes est évalué à l'aide de la méthode présentée par Vassberg et Jameson (2010). Cependant, au contraire des équations d'Euler ou de Navier-Stokes, les équations du champ de gouttelettes ne servent pas au calcul de paramètres scalaires non dimensionnels, comme les coefficients de traînée ou de portance. La variable  $\beta$  sera alors employée sous la forme d'une somme impliquant aussi la dimension des cellules. Pour un profil en deux dimensions, on obtient l'équation 3.26 suivante :

$$\beta_{tot} = \frac{\sum (\beta_i \Delta s_i)}{\Delta s_{tot}} \quad (3.26)$$

Où  $\beta_{tot}$  peut être considéré comme le taux de captation total de gouttelettes sur l'ensemble de la surface du profil,  $\Delta s_{tot}$  est la longueur curviligne totale du profil et  $\beta_i$  et  $\Delta s_i$  sont respectivement le taux de captation local et la longueur curviligne locale d'un volume de contrôle  $i$  le long du profil.

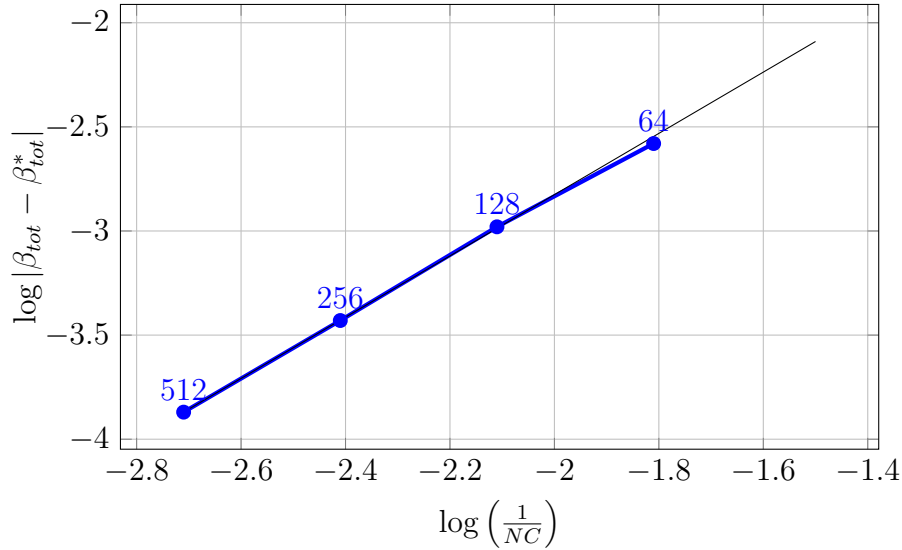


Figure 3.6 Convergence en maillage du taux de captation total des gouttelettes.

Afin d'évaluer l'ordre de précision, les maillages Euler présentés par Vassberg et Jameson (2010) ont été utilisés. Il s'agit d'une famille de maillages presque parfaits d'un profil NACA0012 où le ratio de raffinement entre chaque maillage est de deux dans les deux directions. Les calculs ont été effectués sur les quatre premiers maillages seulement, donc les maillages 64x64, 128x128, 256x256 et 512x512. Le cas de givrage est inspiré du cas 33 de la NASA (Wright *et al.*, 1997) et détaillé à la section 3.6. La figure 3.6 présente les résultats obtenus et montre que la région asymptotique est atteinte à partir du maillage 128x128, ce qui confirme la validité de l'étude.

$\beta_{tot}^*$  est obtenu par la méthode présentée par Vassberg et Jameson (2010). L'ordre de précision obtenu est de 1.473. Or, le schéma employé dans l'algorithme est le schéma décentré en amont d'ordre un. L'ordre de précision obtenu n'aurait donc pas dû être plus élevé que un. Ce phénomène ne s'explique pas et dépend probablement des paramètres du cas étudié, comme Vassberg et Jameson (2010) l'ont expérimenté.

### 3.3.6 Efficacité de la parallélisation

NSCODE-ICE est parallélisé grâce à l'interface de programmation OpenMP qui permet d'effectuer des calculs sur de la mémoire partagée. Cela évite la lourdeur d'une implémentation parallèle sur mémoire distribuée, comme avec le standard MPI. En effet, l'interface OpenMP gère toute la communication entre les différents processeurs et la mémoire. L'efficacité de la parallélisation du solveur du champ de gouttelettes est étudié à la figure 3.7 où le même cas est résolu à l'aide de un, deux et quatre coeurs du processeur. Le cas en question est celui du maillage Euler 128x128 divisé en quatre blocs présenté à la section précédente pour la vérification de l'ordre de précision. Le processeur employé est un Intel Core i7-3930K à 6 coeurs dont la vitesse d'horloge est de 3.20GHz.

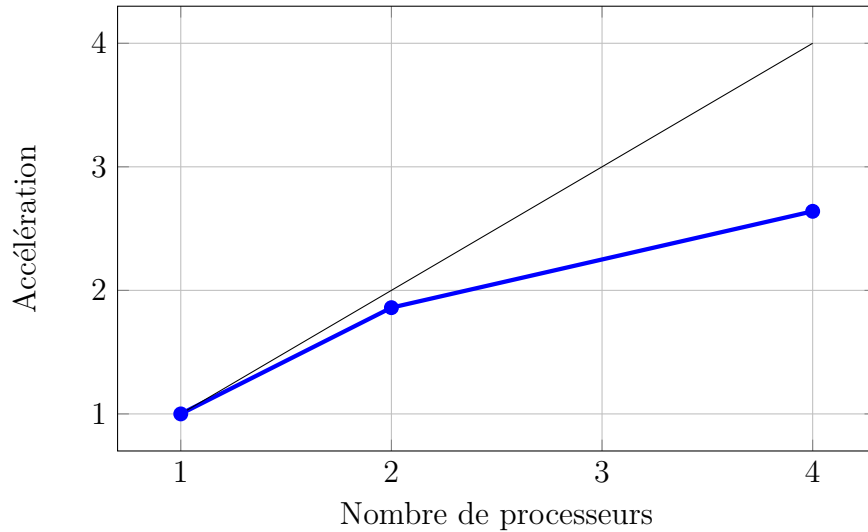


Figure 3.7 Accélération en fonction du nombre de processeurs.

L'accélération est obtenue en divisant le temps total de calcul obtenu à l'aide d'un seul coeur par le temps total obtenu à l'aide de plusieurs coeurs. Comme on le voit sur la figure 3.7, en utilisant plus de coeurs du processeur, on accélère le processus, mais rapidement l'augmentation du nombre de coeurs n'a plus beaucoup d'effet. C'est le signe que la portion parallèle du code n'est pas dominante dans le programme par rapport à la portion en série, ce qui doit être amélioré pour une application industrielle.

### 3.3.7 Résultats du solveur

Afin de comparer l'efficacité des trois solveurs développés, les courbes de convergence du champ de gouttelettes sont superposées. Le cas étudié ici est un cas de givrage étudié par la NASA (Wright et Rutkowski, 1999) pour la validation de leur code LEWICE2D sur un profil NACA0012. Les paramètres de l'essai sont détaillés dans le tableau 3.1 et le champ de gouttelettes obtenu est présenté à la figure 3.9. Les courbes de convergence, présentées à la figure 3.8, montrent l'évolution de l'erreur normalisée en fonction du nombre d'itération 3.8(a) ou du temps de calcul 3.8(b). Une pente plus raide indique un taux de convergence plus élevé et donc une plus grande efficacité de résolution en itérations ou en temps de calcul.

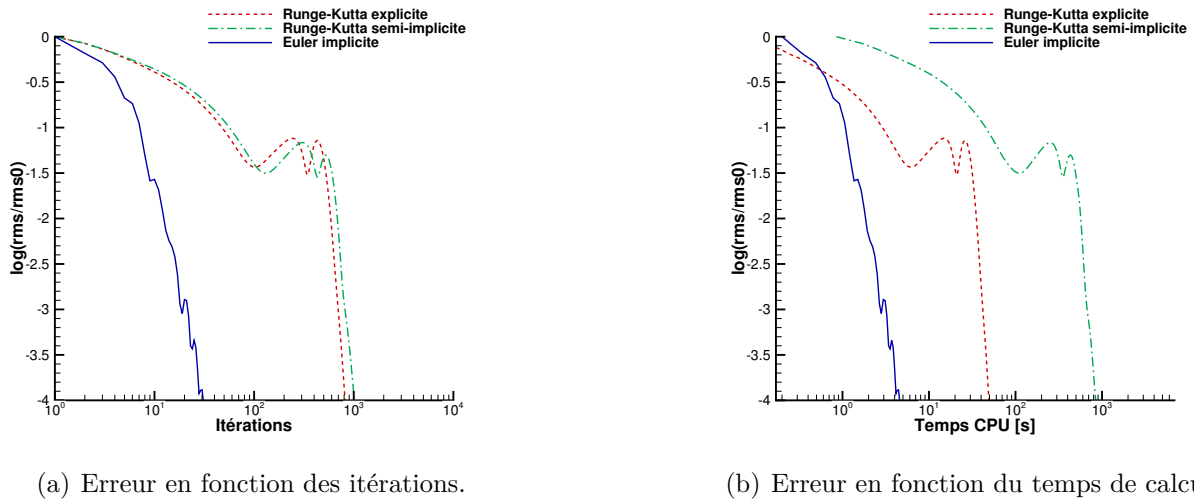


Figure 3.8 Courbes de convergence du champ de gouttelette pour les trois solveurs.

Sur ces figures, les axes sont en échelles logarithmiques. L'erreur normalisée représente en quelque sorte la décimale encore affectée par les itérations suivantes pendant la résolution

Tableau 3.1 Paramètres du cas 405 de la NASA.

Paramètres	Cas 405 de la NASA
Profil	NACA0012
Corde $[m]$	0.5334
Angle d'attaque $[deg]$	3.5
Vitesse $[m/s]$	102.8
Température statique de l'air $[K]$	250.37
Nombre de Reynolds $[10^6]$	4.62
$k_s$	0.0001
LWC $g/m^3$	0.55
MVD $[\mu m]$	20
Temps d'exposition $[s]$	420

du système. Par exemple, une erreur sur la deuxième décimale correspond à  $-2$  sur l'échelle logarithmique. Ainsi une convergence jusqu'à  $10^{-4}$  indique que l'erreur a été diminuée afin d'affecter la solution seulement jusqu'à la quatrième décimale. Le cas présenté correspond à un niveau de convergence réaliste en milieu industriel, la convergence jusqu'à la précision machine (entre  $10^{-14}$  et  $10^{-16}$ ) étant réservée aux simulations effectuées en milieu universitaire en général (Hasanzadeh, 2014). Un processeur de type Intel Core i7-3930K contenant six coeurs dont la vitesse d'horloge est de 3.20GHz a été employé pour effectuer tous les calculs. En particulier, les résultats de la figure 3.8 ont été obtenus à l'aide de quatre coeurs seulement.

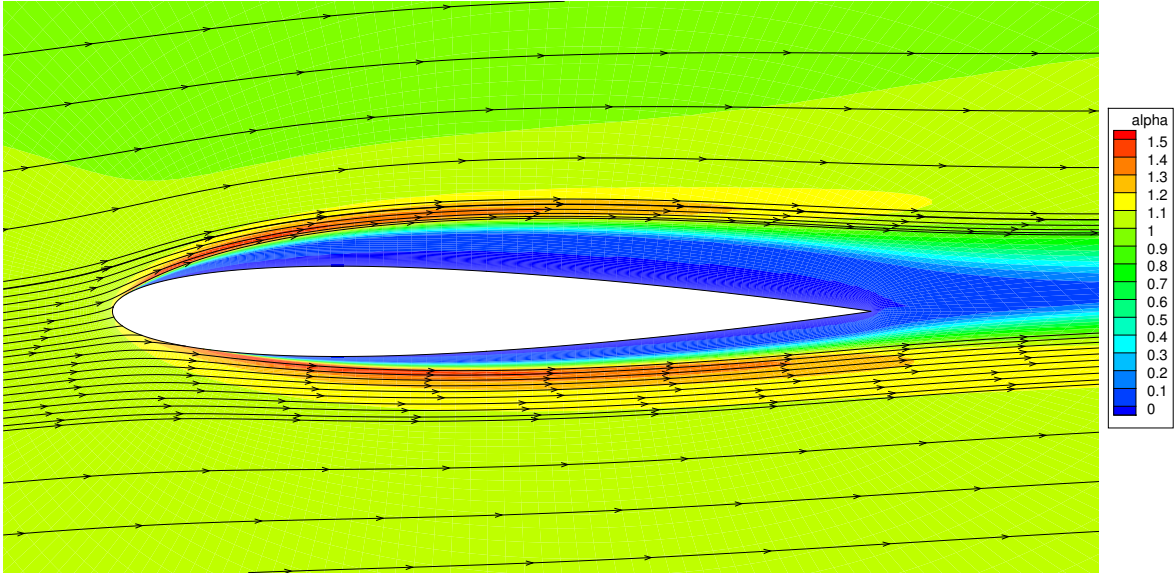


Figure 3.9 Champ de gouttelettes d'un profil NACA0012.

Comme les trois solveurs présentent le même niveau normalisé d'erreur, chacun donne environ la même solution. Cependant, on peut voir qu'il faut beaucoup plus d'itérations et de temps de calcul aux deux schémas Runge-Kutta afin d'équivaloir le solveur Euler implicite. Normalement, le schéma semi-implicite aurait tout de même dû être supérieur au solveur explicite, mais le manque de stabilité dû au terme source donne une moins bonne efficacité dans le cas étudié.

Sur la figure 3.9, les contours représentent la variable  $\alpha$ , soit la densité adimensionnelle des gouttelettes, et les lignes de courant sont tracées à partir des vitesses des gouttelettes. On y voit que la condition limite au mur est respectée, soit que les gouttelettes frappant la géométrie y «entrent», mais que lorsque les gouttelettes «sortent» de la géométrie, les variables sont mises à 0. Dans cette solution, le taux de captation des gouttelettes, soit le paramètre  $\beta$  évalué à l'équation (3.5), est illustré à la figure 3.10 en fonction de la distance le long du profil normalisé par rapport au point de stagnation et à la corde. Les résultats

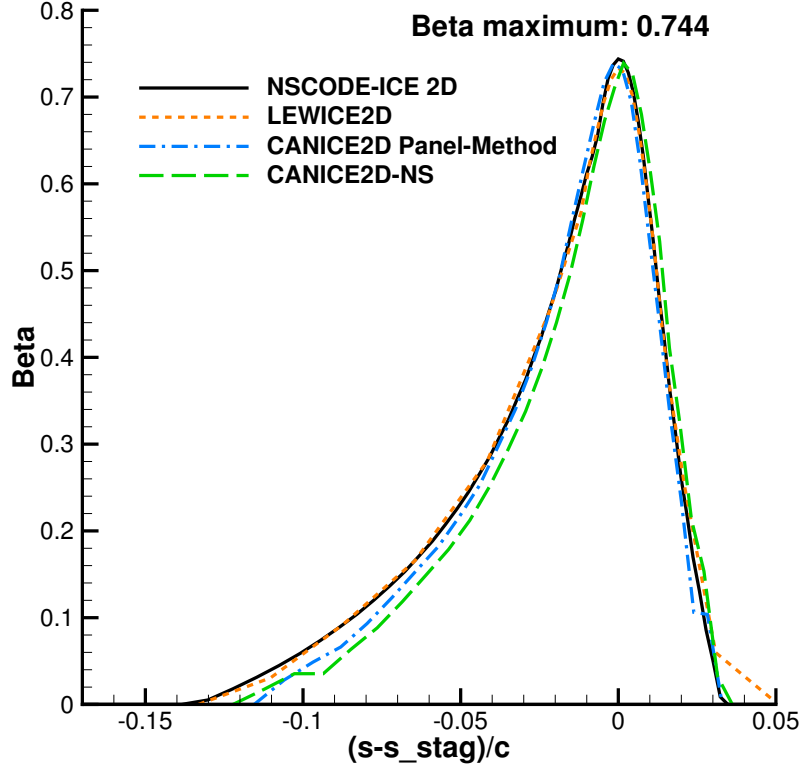


Figure 3.10 Taux de captation des gouttelettes sur un profil NACA0012.

obtenus par NSCODE-ICE sont comparés à ceux de LEWICE 2.0 et de CANICE2D couplé à deux solveurs d'écoulement de l'air différents (Hasanzadeh *et al.*, 2013b). On remarque que les résultats sont tous similaires, mais que la courbe obtenue avec NSCODE-ICE est plus lisse que celles obtenues avec les deux versions de CANICE.

### 3.4 Solveur thermodynamique

Le module thermodynamique évalue le taux d'accumulation de la glace sur la géométrie simulée. Ce module interagit autant avec la solution de l'écoulement d'air qu'avec la solution du champ de gouttelettes, mais à la surface seulement des géométries étudiées. En effet, dans un programme bidimensionnel, le module thermodynamique est unidimensionnel. L'algorithme employé est donc plus simple que pour celui du solveur Navier-Stokes ou pour celui du solveur implicite utilisé pour le champ de gouttelettes. Il s'agit d'un modèle de Messinger itératif, qui sera détaillé plus bas. Son avantage par rapport au modèle de Messinger de base est de permettre l'évaluation de l'écoulement d'eau sur une géométrie complexe à plusieurs points de stagnations.

### 3.4.1 Concept du modèle de Messinger itératif

Le modèle de Messinger itératif est basé sur un modèle de Messinger de base, c'est-à-dire qu'il présente les mêmes deux équations de conservation de la masse et de conservation de l'énergie, présentées plus bas, et les mêmes hypothèses fermant le système d'équations. Ces hypothèses sont énoncées l'une après l'autre, chacune exclusive, afin de proposer un type de surface. Les surfaces sont illustrées à la figure 3.11 et représentent soit une surface sèche, où toutes les gouttelettes gèlent à l'impact, soit une surface mouillée où les gouttelettes ne gèlent pas complètement à l'impact et où un écoulement d'eau liquide est présent sur la surface, soit, enfin, une surface liquide où aucune solidification n'a lieu. Ces surfaces

$$\begin{aligned}
 \text{Surface sèche : } \sum \dot{m}_{out} &= 0 \\
 \text{Surface mouillée : } T_s &= T_{ref} \\
 \text{Surface liquide : } \dot{m}_{ice} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

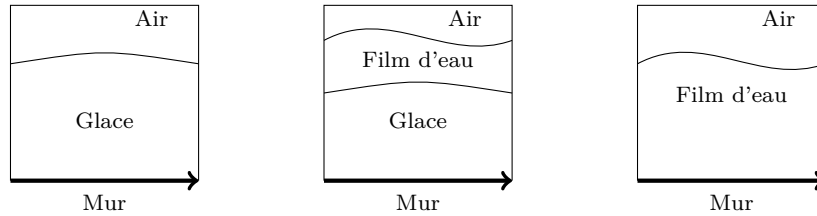


Figure 3.11 Types de surface possibles : Sèche, Mouillée et Liquide.

Dans les deux cas où de l'eau ruisselle, il faut déterminer dans quel sens se déplace cette eau. C'est là que le processus itératif entre en scène, où la force de friction exercée par l'écoulement d'air sur la surface détermine le sens de l'écoulement d'eau. Dans une simulation tridimensionnelle, l'analyse thermodynamique se ferait sur la surface uniquement, donc en deux dimensions. Alors, la force de friction permettrait de déterminer la proportion d'eau, autant que son sens, allant dans chacune des deux directions de la surface (Chengxiang *et al.*, 2012). Dans une simulation 2D cependant, la surface est représentée par une seule dimension curviligne, donc toute l'eau qui ruisselle est acheminée dans la cellule suivante dans le sens déterminé par l'effet du gradient de pression et des contraintes de cisaillement sur la surface. L'itération est faite de façon à calculer jusqu'où se rend le ruissellement d'eau et son effet sur l'accumulation de la glace.

### 3.4.2 Équation de conservation de la masse

La forme de base de l'équation de conservation de la masse est présentée plus bas (Özgen et Canibek, 2009) et est illustré à la figure 3.12. Dans les cas de surface sèche et de surface liquide, il s'agit de la première équation qui est évaluée avec les hypothèses correspondantes. Dans le cas d'une surface mouillée, cette équation est évaluée après l'équation d'énergie.

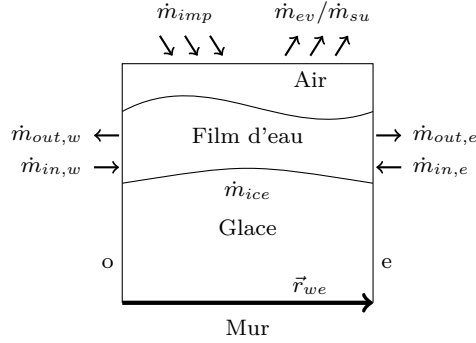


Figure 3.12 Bilan de masse sur un volume de contrôle.

$$\dot{m}_{imp} + \sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out} + \dot{m}_{ev} + \dot{m}_{su} + \dot{m}_{ice} \quad (3.28)$$

Où  $\dot{m}_{imp}$  est la masse de gouttelettes frappant la surface chaque seconde,  $\dot{m}_{ice}$  est le taux d'accumulation de glace,  $\sum \dot{m}_{in}$  correspond au flux d'eau ruisselante entrant dans le volume de contrôle et  $\sum \dot{m}_{out}$  correspond au flux d'eau ruisselante sortant du volume de contrôle. La masse d'eau s'évaporant  $m_{ev}$  ou se sublimant  $m_{su}$ , selon le cas, est évaluée comme suit :

$$\dot{m}_{ev/su} = \frac{0.7}{Cp_a} h_{cv} \left( \frac{p_{v,s} - p_{v,\infty}}{P_\infty} \right) \quad (3.29)$$

Et la pression de vapeur  $p_v$  à la surface de l'eau ou de la glace est définie par (Özgen et Canibek, 2009) :

$$\begin{aligned} p_v &= 3386(0.0039 + 6.8096 \times 10^{-6} \bar{T}^2 + 3.5579 \times 10^{-7} \bar{T}^3) \quad [Pa] \\ \bar{T} &= 72 + 1.8(T - 273.15) \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.4.3 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie est présentée plus bas (Özgen et Canibek, 2009) et est illustrée à la figure 3.13. Dans le cas des surfaces sèche ou liquide, l'équation doit être modifiée afin d'isoler la température de la surface.



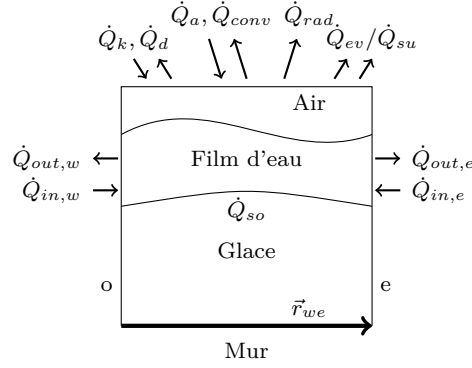


Figure 3.13 Bilan d'énergie sur un volume de contrôle.

$$\dot{Q}_k + \sum \dot{Q}_{in} + \dot{Q}_a = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_d + \dot{Q}_{rad} + \sum \dot{Q}_{out} + \dot{Q}_{ev} + \dot{Q}_{su} + \dot{Q}_{so} \quad (3.31)$$

Où  $\dot{Q}_k$  est le flux d'énergie cinétique des gouttelettes,  $\sum \dot{Q}_{in}$  représente la somme des flux de chaleur entraînés par l'eau ruisselante entrante,  $\dot{Q}_a$  est le gain de chaleur aérodynamique,  $\dot{Q}_{conv}$  est la chaleur perdue par convection,  $\dot{Q}_d$  est la perte de chaleur due à l'impact des gouttelettes,  $\dot{Q}_{rad}$  est la perte de chaleur par radiation,  $\sum \dot{Q}_{out}$  est la somme des flux de chaleur sortant du volume de contrôle avec le ruissellement de l'eau sortante,  $\dot{Q}_{ev}$  et  $\dot{Q}_{su}$  représentent le taux d'énergie libérée dans l'évaporation ou la sublimation respectivement et  $\dot{Q}_{so}$  est le taux d'énergie libérée par la solidification de l'eau. Ces termes sont définis plus bas (Özgen et Canibek, 2009). La définition des termes  $\dot{Q}_{ev}$  et  $\dot{Q}_{su}$  provient de Fortin *et al.* (2006), alors que la définition de  $\dot{Q}_{so}$  provient de Brahimi *et al.* (1994).

$$\begin{aligned} \dot{Q}_k &= \dot{m}_{imp} \frac{U_\infty^2}{2} & \dot{Q}_{rad} &= 4\epsilon\sigma_r T_\infty^3 (T_s - T_\infty) \\ \sum \dot{Q}_{in} &= \sum \dot{m}_{in} C_{p,w} (T_s - T_{ref}) & \sum \dot{Q}_{out} &= \sum \dot{m}_{out} C_{p,w} (T_s - T_{ref}) \\ \dot{Q}_a &= \frac{r h_c U_\infty^2}{2 C_{p,a}} & \dot{Q}_{ev} &= \dot{m}_{ev} L_v \\ \dot{Q}_{conv} &= h_c (T_s - T_\infty) & \dot{Q}_{su} &= \dot{m}_{su} L_s \\ \dot{Q}_d &= \dot{m}_{imp} C_{p,w} (T_s - T_\infty) & \dot{Q}_{so} &= \dot{m}_{so} (C_{p,i} (T_s - T_{ref}) - L_f) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Où

- $T_s$  est la température de surface ;
- $T_\infty$  est la température de l'air à l'infini ;
- $T_{ref}$  est la température de référence où l'eau gèle ;

- $C_{p,w}$  est le coefficient de capacité thermique massique de l'eau ;
- $C_{p,a}$  est le coefficient de capacité thermique massique de l'air ;
- $C_{p,i}$  est le coefficient de capacité thermique massique de la glace ;
- $h_c$  est le coefficient de convection local de l'air ;
- $r$  est le coefficient de recouvrement de l'air ;
- $\epsilon$  est l'émissivité de la surface ;
- $\sigma_r$  est la constante de Stefan-Boltzmann ;
- $L_v$  est la chaleur latente de vaporisation ;
- $L_s$  est la chaleur latente de sublimation ;
- $L_f$  est la chaleur latente de solidification.

### 3.4.4 Coefficient de friction

Le coefficient de friction  $C_f$  est évalué à l'intérieur du solveur Navier-Stokes présenté à la section 3.2.2, mais son utilité dans le processus de givrage est au niveau du module thermodynamique, d'où sa présentation dans cette section. Le coefficient de friction est évalué à partir du tenseur de contraintes visqueuses sur chaque élément de surface de la paroi. Or, les forces de friction à la paroi sont très sensibles à la rugosité de la surface.

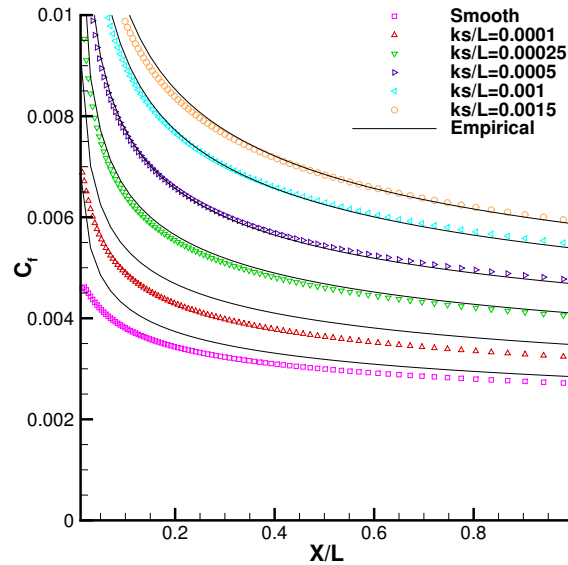


Figure 3.14 Effet de la rugosité sur le coefficient de friction (extrait de Hasanzadeh *et al.*, 2013b).

Pour montrer l'effet de la hauteur des rugosités, on compare les résultats obtenus à l'aide de NSCODE, en utilisant le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras et la correction de Boeing

pour la rugosité, à la relation semi-empirique du coefficient de friction sur une plaque plane, présenté à l'équation (3.33) (Hasanzadeh *et al.*, 2013b). La figure 3.14 montre l'influence de la rugosité sur le coefficient de friction, qui aura à son tour un influence sur le givrage.

$$C_f = \left( 3.476 + 0.707 \ln \frac{x}{k_s} \right)^{-2.46} \quad (3.33)$$

Où  $k_s$  représente la hauteur des rugosités. Dans la légende, la solution « smooth » correspond à une surface lisse où il n'y a pas de rugosité et les solutions « empirical » correspondent aux résultats obtenus à l'aide du modèle de la plaque plane.

### 3.4.5 Coefficient du transfert de chaleur convectif

Le coefficient de convection local de l'air est évalué de façon semi-empirique par une série d'équations (Fortin *et al.*, 2006). Cette méthode est dérivée d'équations analytiques sur les couches limites et dépend du coefficient de friction obtenu dans le solveur Navier-Stokes, comme discuté à la section précédente.

$$1 - \left( \frac{U_e}{U_\infty} \right)^2 = C_p \implies U_e = U_\infty \sqrt{|1 - C_p|} \quad (3.34a)$$

$$U_\tau = U_e \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad (3.34b)$$

$$Re_{\tau-\kappa} = \frac{U_\tau \kappa_s}{\nu_a} \quad (3.34c)$$

$$St_\kappa = 1.92 (Re_{\tau-\kappa})^{-0.45} Pr^{-0.8} \quad (3.34d)$$

$$St = \frac{C_f}{2} \frac{1}{Pr_t + \frac{\sqrt{\frac{C_f}{2}}}{St_\kappa}} \quad (3.34e)$$

$$h_c = \rho_a C_{p,a} U_e St \quad (3.34f)$$

## 3.5 Évolution de la géométrie

Le taux d'accumulation de masse de glace est évalué pour chaque volume de contrôle dans le module thermodynamique. Une façon simple d'obtenir une nouvelle géométrie est de procéder à une avance de front en conservant l'orientation et la largeur de chaque volume de contrôle. Ainsi le déplacement de chaque surface se fait linéairement dans la direction de la normale et la hauteur du rectangle ainsi formé est directement reliée à la masse de glace formée. Afin

d'assurer que la nouvelle géométrie sera lisse, les nouveaux points sont interpolés linéairement entre les hauteurs de deux cellules voisines et ces points sont placés le long de la bissectrice entre les deux cellules.

Le problème de cette technique est la non conservation du volume de glace. En effet, la géométrie n'est pas linéaire mais bien curviligne avec généralement un mélange de zones convexes et de zones concaves. La combinaison des volumes rectangulaires mène à des pertes de glace dans le cas d'une zone concave et à des surplus de glace dans le cas d'une zone convexe, comme montré à la figure 3.15. Plusieurs codes emploient une procédure similaire (Montreuil *et al.*, 2009; Brahimi *et al.*, 1994), malgré son aspect non conservateur et l'impossibilité de prévoir l'effet des pertes et des ajouts de masse sur la solution finale.

Une technique d'évolution de la géométrie employant les bissectrices a été développée par Fortin *et al.* (2004) afin d'être conservative. Cependant cet algorithme considère un point de stagnation unique, ce qui n'est pas adapté au modèle de Messinger itératif qui permet plusieurs points de stagnation.

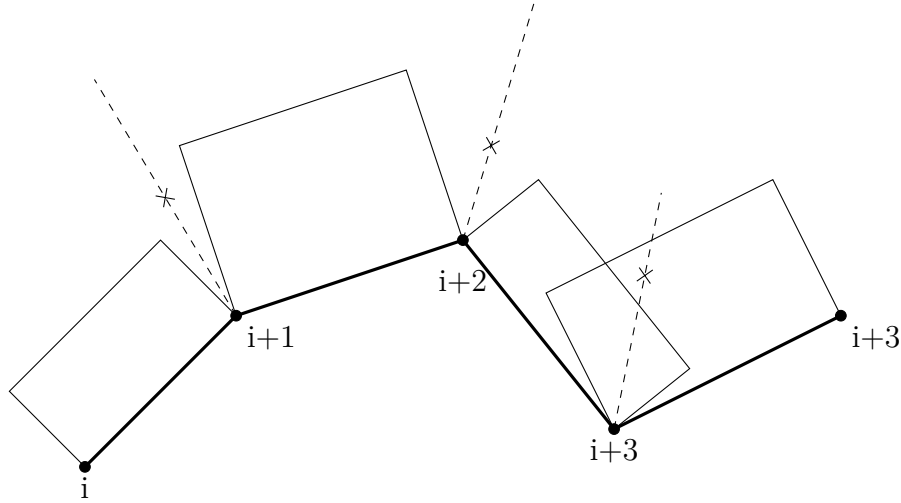


Figure 3.15 Évolution de la géométrie sur des régions convexes et concaves.

À la figure 3.15, les points représentent les noeuds de la géométrie actuelle, alors que les croix représentent les nouveaux noeuds. Les lignes pointillées sont les bissectrices, les lignes pâles sont les rectangles d'accumulation de glace et les lignes foncées forment la géométrie. Les noeuds  $i+1$  et  $i+2$  forment des jonctions convexes où de la matière est «ajoutée», alors que le noeud  $i+3$  forme une jonction concave où de la glace est «perdue» par la superposition.

La hauteur est évaluée comme suit :

$$h = \frac{\dot{m}_{ice}}{A_s \rho_{ice}} \Delta t_{ice} \quad (3.35)$$

Le calcul est direct, chaque hauteur étant évaluée au centre des cellules, puis interpolée au niveau des noeuds du maillage afin d’obtenir la nouvelle géométrie.  $A_s$  représente la surface du volume de contrôle sur laquelle la glace croît.

### 3.6 Résultats bidimensionnels

La présente section contient quelques résultats obtenus sur deux cas d’analyse typiques provenant d’une collaboration entre la NASA, la DRA et l’ONERA (Wright *et al.*, 1997). Le tableau 3.2 présente les paramètres utilisés en soufflerie de givrage lors de l’expérimentation de ces deux cas de givrage. Le cas 33 correspond aux résultats présentés dans la section 3.3.7 plus tôt.

Tableau 3.2 Cas standards de validation en givrage bidimensionnel.

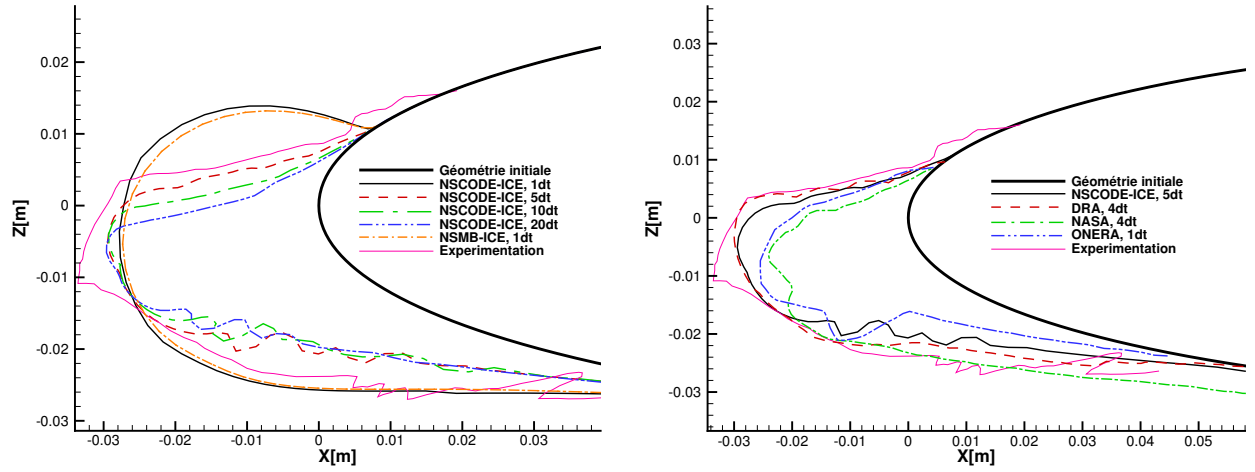
Paramètres	Cas 33 de la NASA	Cas 31 de la NASA
Profil	NACA0012	NACA0012
Corde [ $m$ ]	0.530	0.530
Angle d’attaque [ $deg$ ]	4.0	4.0
Vitesse [ $m/s$ ]	93.89	58.10
Température statique de l’air [ $K$ ]	242.5	269.1
Pression [ $kPa$ ]	92.06	95.61
Nombre de Reynolds [ $10^6$ ]	4.24	2.820
$k_s$	0.0001	0.0001
LWC $g/m^3$	1.05	1.30
MVD [ $\mu m$ ]	20	20
Temps d’exposition [ $s$ ]	372	480

Pour tous les calculs, le solveur Navier-Stokes a été convergé jusqu’à  $10^{-6}$ , le solveur de gouttelettes jusqu’à  $10^{-8}$ , le solveur thermodynamique jusqu’à  $10^{-6}$  et le mailleur jusqu’à  $10^{-4}$  autant pour le maillage initial que pour la régénération des maillages (Bourgault-Côté et Laurendeau, 2015). Pour le cas de givre, une comparaison a été effectuée avec le programme de CFD tridimensionnel NSMB-ICE (Pena *et al.*, 2014b,a). Ce programme étant actuellement limité aux cas de givre, aucune comparaison n’est possible avec le cas de verglas. Les résultats de NSMB-ICE ont été évalués en deux dimensions et la convergence a été limitée à  $10^{-6}$  pour tous les solveurs.

#### 3.6.1 Givre : cas 33 de la NASA

La figure 3.16 montre deux vues rapprochées du bord d’attaque des profils où s’est accumulée la glace de type givre. La première montre la différence entre les formes obtenues lorsque

différents nombres d'incrément de temps sont utilisés. On y fait aussi la comparaison avec les résultats obtenus par NSMB-ICE avec la forme obtenue par NSCODE-ICE en un seul incrément de temps, puisque NSMB-ICE est actuellement limité à des simulations de givrage à un seul incrément de temps. On remarque une légère différence en amplitude, ce qui est dû au schéma de premier ordre moins précis utilisé dans NSCODE-ICE. Dans la seconde image, on compare le résultat obtenu par NSCODE-ICE en cinq incrément de temps à ceux obtenus par d'autres programmes de simulation, la plupart utilisant plusieurs incrément de temps. On remarque la similarité de forme entre tous ces résultats et les valeurs expérimentales. Ainsi la différence provient essentiellement des différentes amplitudes de glace, ce qui peut s'expliquer par l'utilisation de différents algorithmes d'évolution de la géométrie.



(a) Givre accumulé avec différents nombres d'incrément de temps.

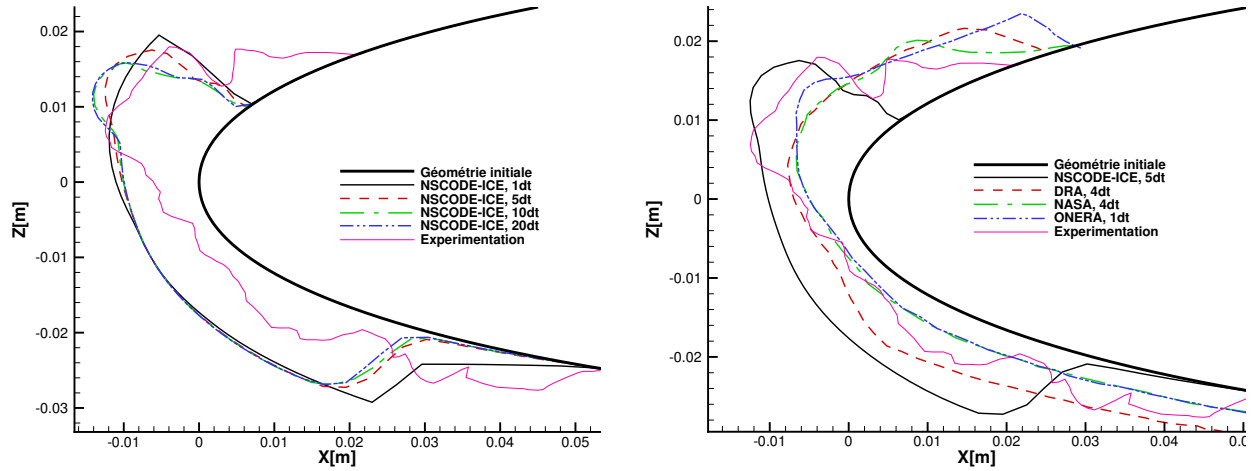
(b) Givre accumulé comparé à d'autres codes.

Figure 3.16 Cas 33 de la NASA, comparaison entre plusieurs nombres d'incrément de temps (a) et d'autres simulations (b).

Dans la figure 3.16(a), on voit que les formes de glace convergent vers le résultat obtenu à l'aide de 20 incrément de temps. En fait, des résultats très similaires ont été obtenus avec 40, 80 et 160 incrément de temps, mais leur ajout dans cette figure la rendrait incompréhensible. Le résultat obtenu en 20 incrément de temps est plus éloigné de la forme expérimentale que celui obtenu en cinq incrément de temps. Cependant il s'agirait d'étalonner le modèle avec la bonne rugosité de surface afin de régler cet écart. Pour l'instant, aucun étalonnage n'est faite, mais la littérature (Hasanzadeh *et al.*, 2013a) semble indiquer qu'un tel étalonnage devrait être faite conditionnellement à l'obtention de la convergence en maillage et en incrément de temps.

### 3.6.2 Verglas : cas 31 de la NASA

La figure 3.17 montre aussi deux vues rapprochées du bord d'attaque des profils où la glace de type verglas, cette fois, s'est accumulée. La première image illustre l'effet de l'utilisation de plusieurs incréments de temps. Dans la seconde vue, la comparaison est effectuée entre NSCODE-ICE et les programmes de simulation utilisés comme comparaison à la figure 3.16(b). Encore une fois, le résultat obtenu avec cinq incréments de temps a été considéré afin d'offrir une comparaison plus fidèle. Dans ce cas-ci, l'amplitude autant que la forme de la glace obtenue sont différents. En effet, NSCODE-ICE capture la forme de la «corne» de glace du haut, mais la région où la glace est présente est trop réduite. De plus, l'amplitude générale de la glace produite est trop élevée. Il est possible que le modèle de ruissellement d'eau ne soit pas adéquat pour évaluer du verglas, en ne laissant simplement pas l'eau s'écouler aussi loin qu'il faudrait.



(a) Verglas accumulé avec différents nombres d'incrément de temps.

(b) Verglas accumulé comparé à d'autres codes.

Figure 3.17 Cas 31 de la NASA, comparaison entre plusieurs nombres d'incrément de temps (a) et d'autres simulations (b).

Dans la figure 3.17(a), la différence entre les résultats n'est pas très apparente. Une mauvaise évaluation du coefficient de convection peut expliquer cela. En effet, l'eau ruisselle sur la surface selon la même trajectoire et gèle toujours selon la même configuration, peu importe le nombre d'intervalles de temps utilisés. Or c'est le coefficient de convection qui a le plus d'effet sur la fraction de glace qui se forme. Pour le givre, comme toute l'eau gèle à l'impact, le coefficient de convection n'a pas d'impact sur la position de l'accumulation, ce qui explique pourquoi les résultats de givre présentent une variation lorsque plusieurs incréments de temps sont employés, au contraire des résultats de verglas. Ainsi, les résultats présentés dans le reste

de ce rapport seront exclusivement de type givre.

### 3.6.3 Efficacité générale du processus

La présente section détaille le temps de roulement de chaque module du programme NSCODE-ICE. Dans le tableau 3.3, les durées sont indiquées en secondes. La catégorie «Autres» est constituée principalement du traitement des fichiers via le module principal écrit en langage python. Les données ont été obtenues à partir du cas 33 de la NASA présenté précédemment. Un seul coeur du processeur a servi au calcul et un seul saut temporel a été effectué. En fait, si plusieurs intervalles de temps étaient employés, une multiplication directe du temps de roulement pourrait être effectuée sans que l'erreur soit importante.

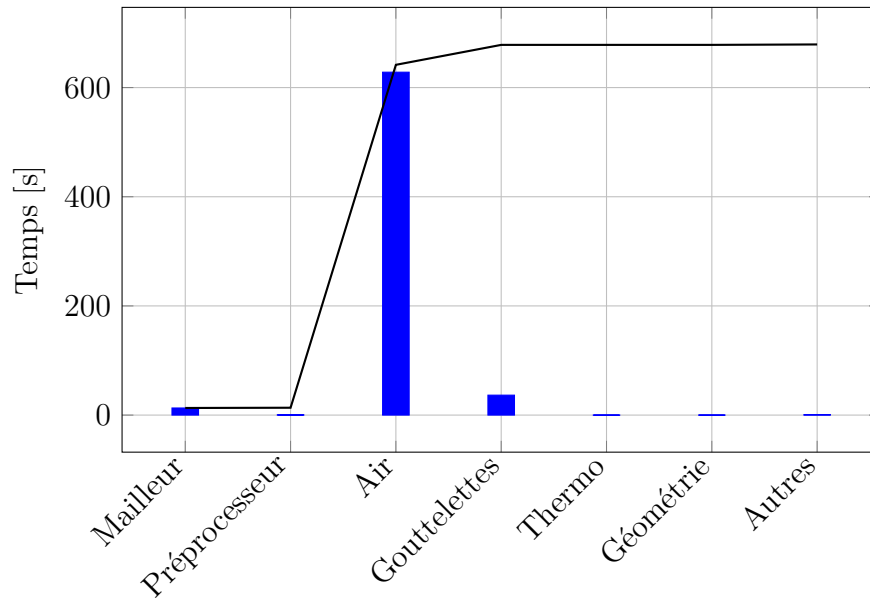


Figure 3.18 Évolution du temps durant le processus.

Tableau 3.3 Temps requis pour chaque module.

Mailleur	Préprocesseur	Air	Gouttelettes	Thermo	Géométrie	Autres
13.026 s	0.445 s	628.210 s	36.536 s	0.006 s	0.002 s	0.795 s
1.92%	0.06%	92.52%	5.38%	≈ 0%	≈ 0%	0.12%

À l'aide de ces données, on voit que le solveur Navier-Stokes requiert plus de 92% du temps total de la simulation, de 679.020 secondes. L'amélioration de l'efficacité des autres modules de givrage est secondaire comparée à ce module.



## CHAPITRE 4 Simulation de givrage sur une aile en flèche

### 4.1 Solveur Navier-Stoke 2.5D

L'hypothèse de l'aile en flèche infinie consiste à appliquer un changement de variable permettant d'aligner le système de coordonnées avec l'axe local de l'envergure. En effet, si le système d'axe conventionnel de l'avion  $[x, y, z]$  est pivoté sur son axe vertical  $z$  en fonction de la flèche  $\Lambda$ , on obtient un système de coordonnées modifiées  $[x', y', z']$  où  $y'$  pointe maintenant dans la direction de l'envergure (Ghasemi *et al.*, 2014). Ce changement de coordonnées est illustré à la figure 4.1. En effectuant une coupe dans le plan  $x'z'$ , on obtient une section bidimensionnelle normale à l'envergure de l'aile en flèche, ce qui est généralement simulé à l'aide d'un changement de conditions limites en fonction de la flèche (Dorsch et Brun, 1953; Hedde et Guffond, 1995; Pueyo, 2013).

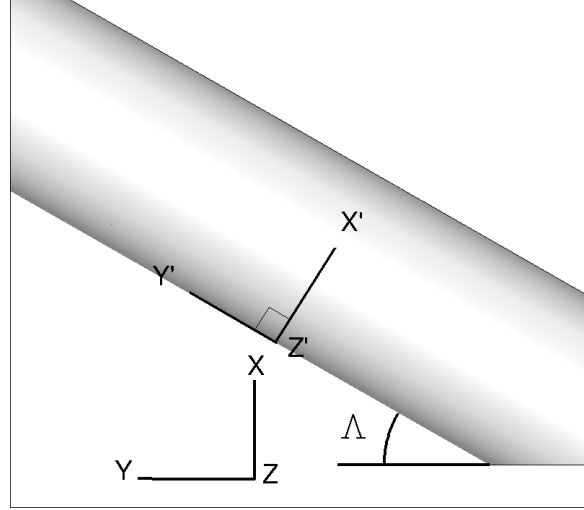


Figure 4.1 Système de coordonnées modifiées (extrait de Ghasemi *et al.*, 2014).

L'approche novatrice amenée par Ghasemi *et al.* (2014) consiste à procéder au changement de système de coordonnées discuté plus haut et à simplifier le système d'équations tridimensionnelles afin de garder constantes les variables dans la direction de l'envergure  $y'$ .

Soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0 \quad (4.1)$$

Où  $\phi$  représente une variable quelconque.

#### 4.1.1 Équation de l'écoulement transversal

L'équation (4.1) permet de simplifier le système tridimensionnel de Navier-Stokes afin d'obtenir le système bidimensionnel standard auquel s'ajoute l'équation du momentum de l'air dans la direction  $y'$ , présentée plus bas (Ghasemi *et al.*, 2014). Comme on le voit, cette équation ne varie pas en fonction de  $y'$  et permet donc de calculer la vitesse transversale  $v'$  en tout point

du domaine 2D. L'appellation 2.5D vient du fait que les vecteurs vitesses tridimensionnels sont évalués, mais seulement sur un maillage bidimensionnel.

$$\frac{\partial \rho v'}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v' u')}{\partial x'} + \frac{\partial (\rho v' w')}{\partial z'} = \left[ \frac{\partial}{\partial x'} (\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z'} (\tau_{yz}) \right] \quad (4.2)$$

#### 4.1.2 Solveur et conditions limites

L'équation (4.2) ne dépend pas de la pression  $P$ . De la même façon, les autres équations du système 2D ne dépendent ni de  $y'$  ni de  $v'$ . Ainsi, il s'agit d'une équation découplée qui peut être résolue indépendamment du reste du système. Le solveur employé pour ce faire dans NSCODE est le solveur ADI employé par Spalart et Allmaras (1992) pour résoudre leur modèle de turbulence (Ghasemi *et al.*, 2014).

Les valeurs de la condition limite de champ lointain des vitesses doivent être modifiées afin de prendre en compte la flèche  $\Lambda$  en plus de l'angle d'attaque  $AOA$  :

$$\begin{aligned} u'_\infty &= U_\infty \cos(AOA) \cos(\Lambda) \\ v'_\infty &= U_\infty \cos(AOA) \sin(\Lambda) \\ w'_\infty &= U_\infty \sin(AOA) \end{aligned} \quad (4.3)$$

#### 4.1.3 Résultats préliminaires

Afin d'illustrer les résultats obtenus, on peut extruder la section 2D ayant servi au calcul dans la direction de la flèche. La figure 4.2 montre les lignes indiquant l'orientation et le sens de la friction sur l'aile (Ghasemi *et al.*, 2014). On y voit trois éléments distincts qui indiquent que le modèle 2.5D fonctionne pour l'écoulement de l'air et donne des résultats intéressants. D'abord, la zone i montre que le point de stagnation devient une ligne de stagnation, comme en 3D. Ensuite, la zone ii montre que le choc normal devient un choc oblique. Enfin, la zone iii montre que le décrochage se produit plus tôt que ce qu'un modèle 2D prédit, ce qui indique que l'épaississement de la couche limite dû aux effets 3D est modélisé par le modèle 2.5D.

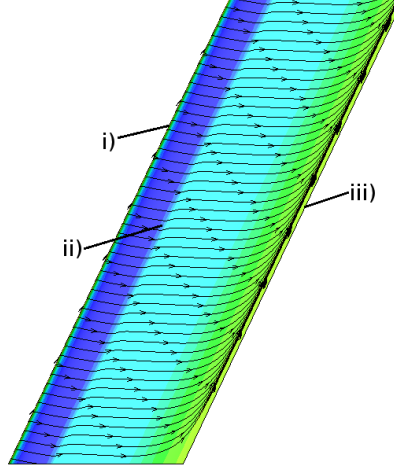


Figure 4.2 Lignes de friction sur une aile en flèche infinie dans un écoulement transsonique (extrait de Ghasemi *et al.*, 2014).

## 4.2 Solveur de gouttelettes 2.5D

À la suite des résultats obtenus par Ghasemi *et al.* (2014) et leur modèle 2.5D, la même démarche a été appliquée au système d'équations tridimensionnelles des gouttelettes.

### 4.2.1 Équation transversale des gouttelettes

L'équation obtenue s'ajoutant au système bidimensionnel (3.2) est présentée plus bas. La vitesse transversale des gouttelettes  $v'_d$  n'apparaît pas directement dans les équations du système (3.2), donc elle est effectivement découplée. En fait, l'influence de cette composante du vecteur vitesse aura un effet sur le terme source des autres équations, à travers le coefficient de traînée  $C_D$  et le nombre de Reynolds  $Re_D$ .

$$\frac{\partial \alpha v'_d}{\partial t} + \frac{\partial \alpha v'_d u'_d}{\partial x'} + \frac{\partial \alpha v'_d w'_d}{\partial z'} = \frac{C_D Re_d}{24K} \alpha (v'_a - v'_d) \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Solveur et conditions limites

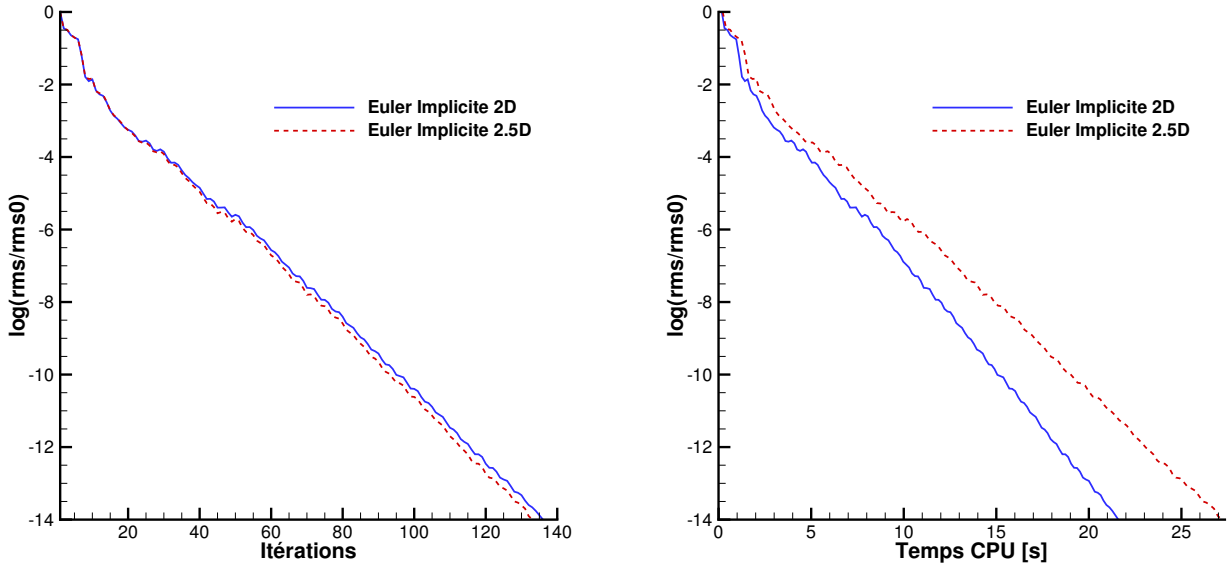
Au contraire de l'approche de Ghasemi *et al.* (2014), l'équation de la vitesse transversale des gouttelettes peut être résolue à l'aide de la même technique employée pour les équations du système bidimensionnel, soit le schéma d'Euler implicite où la matrice principale est inversée à l'aide de l'algorithme itératif BiCGStab. En effet, l'équation (4.4) est très similaire dans sa forme à l'équation du momentum, en particulier celle dans la direction  $x$  étant donné que

son terme source n'est composé que du terme de traînée.

De la même façon que pour l'écoulement de l'air, les valeurs de la condition limite de champ lointain sont modifiées, mais la condition limite de mur reste inchangée et s'applique sur la vitesse transversale des gouttelettes comme sur les autres variables.

$$\begin{aligned} u'_{d,\infty} &= U_{d,\infty} \cos(AOA) \cos(\Lambda) \\ v'_{d,\infty} &= U_{d,\infty} \cos(AOA) \sin(\Lambda) \\ w'_{d,\infty} &= U_{d,\infty} \sin(AOA) \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'ajout de cette équation n'affecte pas le taux de convergence du schéma d'Euler implicite, comme le montre la figure 4.3, bien que le temps de calcul total soit augmenté d'environ 25%. Cette augmentation est normale, puisqu'on ajoute une quatrième équation à résoudre.



(a) Erreur en fonction des itérations.

(b) Erreur en fonction du temps de calcul.

Figure 4.3 Courbes de convergence du champ de gouttelettes 2.5D comparées au 2D.

### 4.3 Solveur thermodynamique

Le solveur thermodynamique n'est pas modifié par l'ajout de l'hypothèse de l'aile en flèche infinie. En effet, augmenter la dimension du système en ajoutant la direction de l'envergure aux équations (3.28) et (3.31) ajoute des termes de masse et d'énergie liés à l'eau de ruissellement entrant et sortant dans cette direction. Toutefois, comme montré à l'équation (4.6),

l'eau de ruissellement entrant dans un volume de contrôle dans la direction de l'envergure  $y'$  ressortira par la suite, n'ayant donc aucune influence sur le bilan de masse ou le bilan d'énergie.

$$\frac{\partial \dot{m}_{eau,y'}}{\partial y'} = 0 \implies \dot{m}_{eau,in,y'} = \dot{m}_{eau,out,y'} \quad (4.6)$$

En fait, le seul effet du modèle 2.5D sur l'aspect thermodynamique provient de l'ajout d'une composante de vitesse aux gouttelettes et à l'air, ce qui modifie le flux d'eau sur la géométrie, le cisaillement créé par l'air et le coefficient de friction.

#### 4.4 Modèles 2D de la flèche

Comme mentionné à la section 2.5, l'effet de la flèche sur les formes de glace a amené plusieurs groupes de recherche à développer des modèles s'appliquant aux simulations en deux dimensions et permettant de prendre en compte la flèche sur une aile. Ces modèles consistent en des corrections appliquées à différents niveaux du processus de givrage, ce qui est très différent de la technique du 2.5D. Deux de ces modèles sont présentés plus bas et seront comparés aux résultats obtenus avec la technique du 2.5D.

##### 4.4.1 Modèle de Dorsch

Dorsch et Brun (1953) ont proposé un modèle basé sur le même changement de système de coordonnées proposé à la section 4.1, auquel s'ajoute quelques corrections. Ce modèle est détaillé plus bas. Le changement de système de coordonnées entraîné par l'équation (4.7a) fait en sorte que le calcul se déroule sur un plan normal au bord d'attaque de l'aile.

$$x' = x \cos(\Lambda) \quad (4.7a)$$

$$y' = y$$

$$U'_\infty = U_\infty \cos(\Lambda) \quad (4.7b)$$

$$\bar{c}' = \bar{c} \cos(\Lambda) \quad (4.7c)$$

$$AOA' = \frac{AOA}{\cos(\Lambda)} \quad (4.7d)$$

$$\beta_{3D} = \beta_{2D} \cos(\Lambda) \quad (4.7e)$$

Selon Pueyo (2013), le paramètre  $\beta_{3D}$  doit être utilisé seulement afin de le comparer à des résultats obtenus d'un programme tridimensionnel. Pour le calcul du flux d'eau à la surface, on se sert du paramètre  $\beta_{2D}$ , tel qu'évalué à l'équation (3.5). C'est donc l'approche qui a été employée pour les comparaisons dans les sections suivantes.

#### 4.4.2 Modèle de Pueyo

Au contraire de Dorsch et Brun (1953), Pueyo (2013) a développé une méthode où les calculs se font sur le plan de référence initial de l'écoulement. Cela permet d'éviter les changements de variable et de système de coordonnées. Cependant, une correction doit être appliquée au taux de captation des gouttelettes sur la géométrie afin de simuler l'effet de la flèche.

Ainsi,

$$\beta_{3D} = \frac{dA}{dS_\Lambda} = \frac{dA}{dS_0} \cdot \frac{dS_0}{dS_\Lambda} = \beta_{2D} \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{\cos^2(\Lambda)}}} \quad (4.8)$$

Où  $dS_0$  est la surface qu'aurait un élément s'il n'y avait pas de flèche,  $dS_\Lambda$  est la surface d'un élément considérant la flèche de l'aile et  $\beta_{2D}$  est évalué tel qu'indiqué à l'équation (3.5).

### 4.5 Résultats

Les résultats présentés plus bas sont de deux types et permettent de valider le modèle de givrage 2.5D (Bourgault-Côté et Laurendeau, 2015). D'abord, plusieurs comparaisons seront effectuées avec des résultats 3D sur des ailes infinies avec angle de flèche. Ces cas sont basés sur le cas 33 de la NASA (Wright *et al.*, 1997), dont les paramètres d'essai ont été présentés au tableau 3.2, mais avec un angle de flèche. Tous les résultats 2.5D obtenus seront comparés aux résultats 2D, aux résultats obtenus en utilisant les modèles de Dorsch et Pueyo, aux résultats 3D obtenus par NSMB-ICE. Le maillage 3D utilisé par NSMB-ICE a été obtenu par extrusion en angle du maillage 2D utilisé dans NSCODE-ICE.

Ensuite, une comparaison sera effectuée sur des résultats expérimentaux et numériques 3D obtenus sur une aile finie avec angle de flèche (Papadakis *et al.*, 2005). La comparaison ciblera les deux sections normales au bord d'attaque où la glace expérimentale obtenue en soufflerie a été mesurée. Encore une fois, la comparaison sera faite à l'aide des résultats 2D, des résultats obtenus à l'aide des modèles de Dorsch et Pueyo, des résultats 3D obtenus par LEWICE et des données expérimentales.

Pour tous les calculs, les différents solveurs ont été convergés aux mêmes valeurs présentées à la section 3.6, autant pour NSCODE-ICE que pour NSMB-ICE.

#### 4.5.1 Comparaison avec une aile infinie

Les deux cas présentés plus bas sont basés sur le cas 33 de la NASA présenté au tableau 3.2, mais avec des angles de flèche de  $20^\circ$  et  $40^\circ$  respectivement. Les calculs ont été effectués avec un seul incrément de temps, puisque NSMB-ICE ne peut pas faire de simulations en plusieurs incréments de temps. Les résultats sont présentés aux figures 4.4 à 4.6. On remarque d'abord un écart entre le taux de captation maximum obtenu par NSCODE-ICE 2.5D et NSMB-ICE pour les deux cas. Bien que n'étant pas montré, cet écart est présent aussi dans le cas 2D comparé à une géométrie extrudée sans angle de flèche et analysée par NSMB-ICE. Il s'agit donc d'une erreur systématique attribuable aux différences entre les deux solveurs, tel le schéma de discrétisation spatial implémenté, plutôt qu'à un effet du modèle 2.5D.

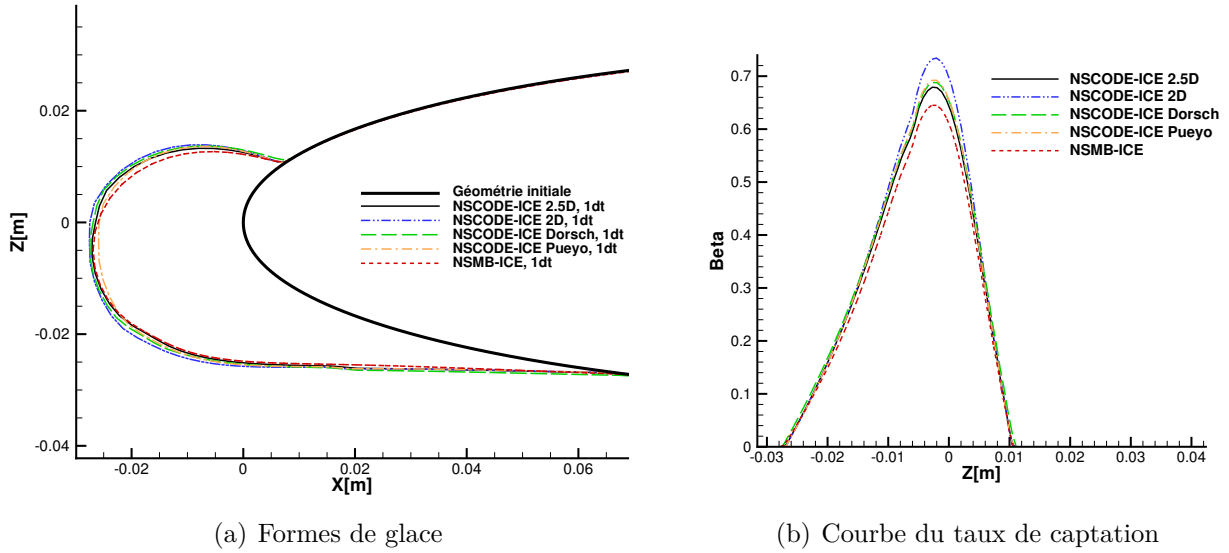


Figure 4.4 Formes de glace (a) et courbes du taux de captation (b) avec  $20^\circ$  d'angle de flèche. Cas 33 de la NASA.

Malgré cet écart dans le taux de captation, les formes de glace obtenues par NSCODE-ICE 2.5D sont très près des formes de glace obtenues par le solveur tridimensionnel. En fait, on voit clairement que les analyses bidimensionnelles surestiment l'accumulation de glace et que les deux modèles simulant la flèche sont éloignés des résultats 3D. En effet, le modèle de Dorsch a tendance à surestimer un peu l'accumulation de glace et la région où cette glace s'accumule, alors qu'à l'inverse le modèle de Pueyo sous-estime l'accumulation. Cette différence entre les deux modèles ne s'observe que sur les formes de glace, car leurs courbes du taux de captation des gouttelettes sont très similaires.

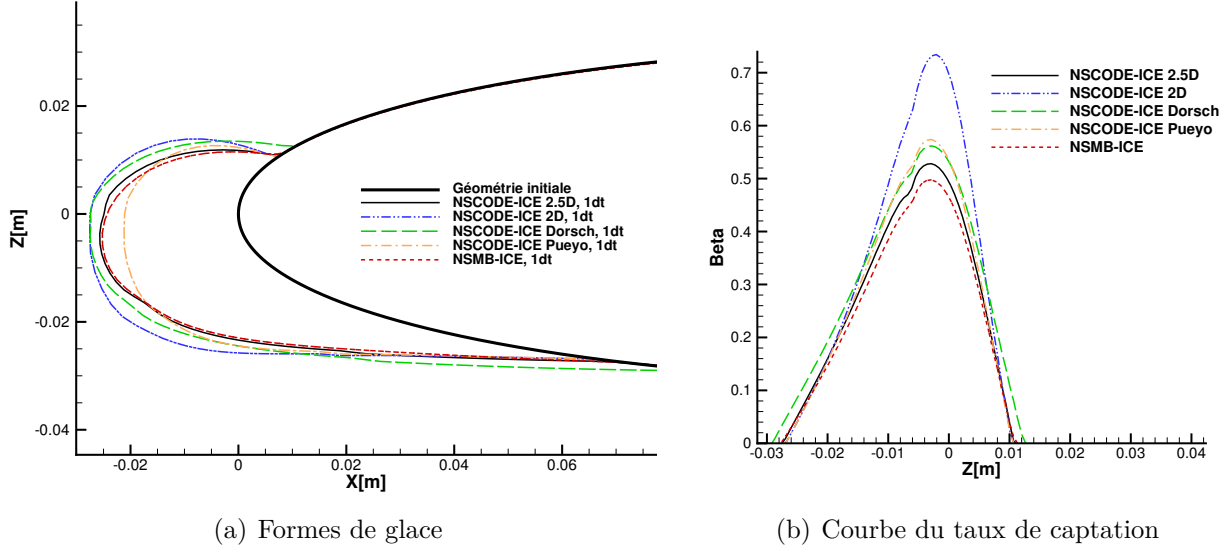


Figure 4.5 Formes de glace (a) et courbes du taux de captation (b) avec 40° d'angle de flèche. Cas 33 de la NASA.

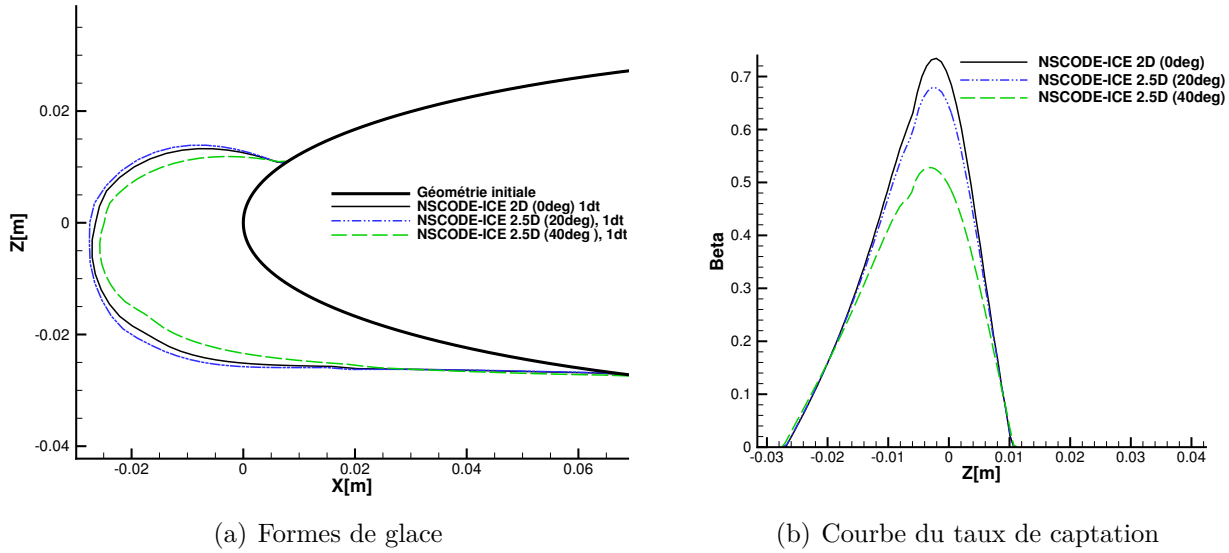


Figure 4.6 Formes de glace (a) et courbes du taux de captation (b) à tous les angles de flèche. Cas 33 de la NASA.

Ainsi peut-on affirmer que le modèle de l'aile infinie en flèche a un effet significatif sur le champ de gouttelettes et que cela influence la forme de glace obtenue et le taux de captation des gouttelettes. D'ailleurs, la figure 4.6 montre bien que l'effet de l'angle de flèche est de plus en plus prononcé en augmentant, comme l'on pouvait s'y attendre, et que la forme de glace obtenue ne change pas seulement en amplitude mais aussi en configuration. Or, cette modification ne peut être reproduite en appliquant un simple facteur tel que  $\cos(\Lambda)$ .



#### 4.5.2 Comparaison avec une aile finie

Les figures 4.9 à 4.11 présentent les résultats obtenus avec NSCODE-ICE sur une aile finie basée sur le profil GLC305, montré à la figure 4.8, et dont l'angle de flèche est de  $28^\circ$ . Deux sections de l'aile ont été analysées, la coupe A et la coupe B, qui sont normales au bord d'attaque de l'aile. Les détails géométriques de l'aile sont donnés à la figure 4.7. Les résultats 2.5D seront encore une fois comparés aux résultats 2D, ainsi qu'aux deux modèles simulant la flèche. La comparaison sera aussi effectuée avec les résultats 3D de NSMB et de LEWICE ainsi qu'avec des données expérimentales (Papadakis *et al.*, 2005). Les résultats obtenus avec NSMB-ICE ont été simulés sur le maillage présenté à la figure A.1 de l'annexe A. Dans le cas des résultats de LEWICE, les formes de glace semblent provenir d'un algorithme utilisant plusieurs incréments de temps, bien qu'aucune mention n'en soit effectuée dans le rapport. La comparaison sera donc effectuée avec les résultats obtenus à l'aide de cinq incréments de temps par NSCODE-ICE. Cependant, il faut mentionner que les résultats de LEWICE ont été obtenus par couplage d'un solveur Navier-Stokes tridimensionnel avec un solveur de givrage 2D résolvant plusieurs coupes de la géométrie. Il ne s'agit donc pas d'un programme de givrage complètement tridimensionnel, mais il en est proche.

Tableau 4.1 Données des cas de givrage tridimensionnel.

Paramètres	Coupe A	Coupe B
Profil	GLC305	GLC305
Corde [m]	0.358	0.499
$AOA_{eff}$ [deg]	4.14	2.09
Vitesse [m/s]	89.99	89.99
Nombre de Mach	0.1767	0.1767
Température [K]	261.87	261.87
Pression [kPa]	101.35	101.35
Reynolds [ $10^6$ ]	1.59	2.21
$k_s$	0.0005	0.0005
LWC $g/m^3$	0.51	0.51
MVD [ $\mu m$ ]	14.5	14.5
Temps [s]	300	300

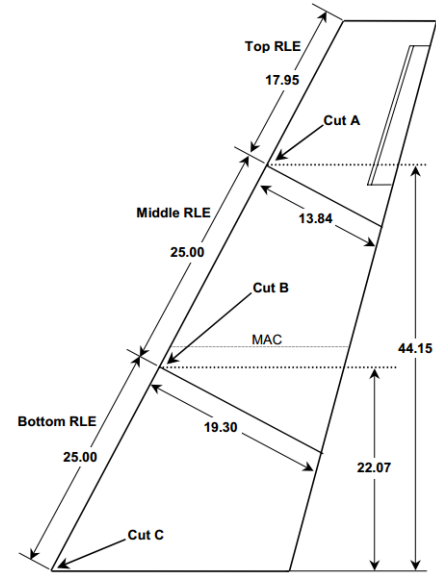


Figure 4.7 Vue de haut de l'aile finie GLC305. Les dimensions sont en pouces. (extrait de Papadakis *et al.*, 2005)

Les conditions de soufflerie de l'essai sont détaillées dans le tableau 4.1. L'angle d'attaque expérimental utilisé, et employé pour les simulations 3D, est de  $6^\circ$ . Cependant, les deux coupes ont été simulées avec leurs angles effectifs, comme mentionné dans le tableau 4.1. Ces angles ont été obtenus à chaque coupe par l'emploi d'une procédure de couplage subsonique

visqueux avec la «Vortex Lattice Method» (VLM), telle que présenté par Gallay *et al.* (2014). Cela permet d'orienter les simulations 2D sur l'angle réel ressenti par chacune des sections.

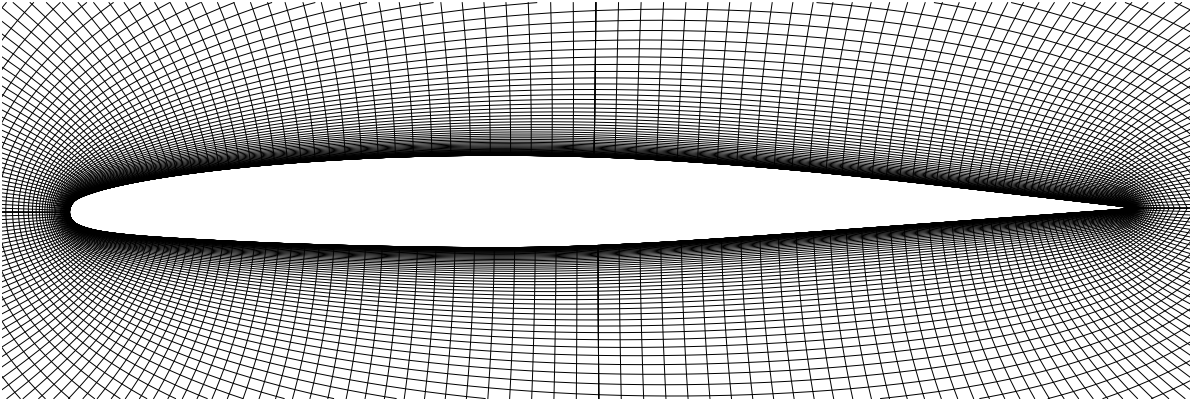


Figure 4.8 Maillage utilisé pour simuler le profil GLC305. 257x129.

Encore une fois, les courbes du taux de captation des gouttelettes sont similaires entre NSCODE-ICE 2.5D et NSMB-ICE. Les résultats 2D surestiment la quantité d'eau entrant en collision avec la géométrie dans les deux cas. Les deux modèles simulant la flèche sont similaires, mais présentent une légère surestimation. Cependant, lorsqu'on compare les formes de glace obtenues, les résultats varient entre la coupe A et la coupe B. En effet, dans le cas de la coupe A, les résultats de NSMB-ICE et LEWICE sont beaucoup plus proches des données expérimentales que les autres simulations. D'un autre côté, pour la coupe B, les résultats 2.5D sont très similaires aux données expérimentales en amplitude. Dans les deux cas, les formes de la glace obtenues sont plus similaires aux données expérimentales lorsque cinq incréments de temps sont utilisés.

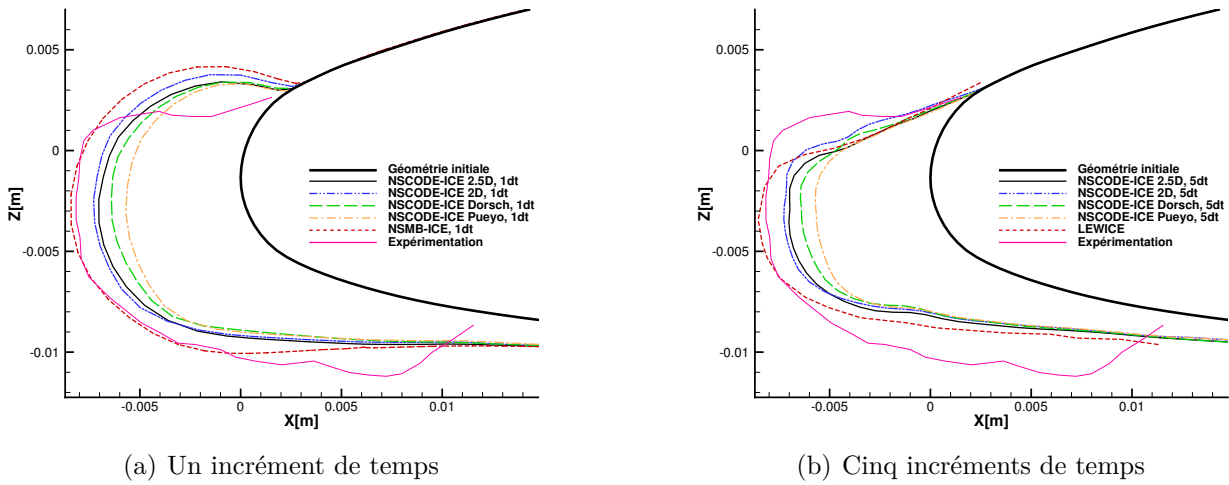
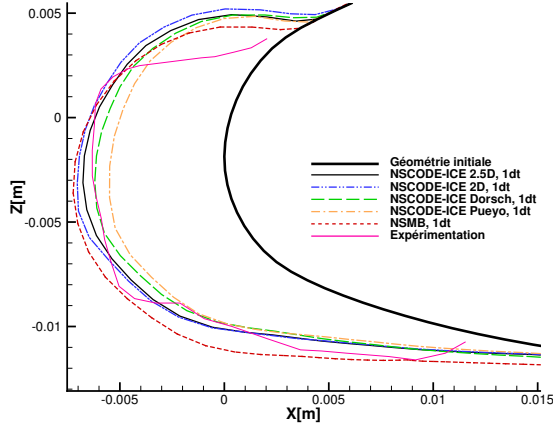
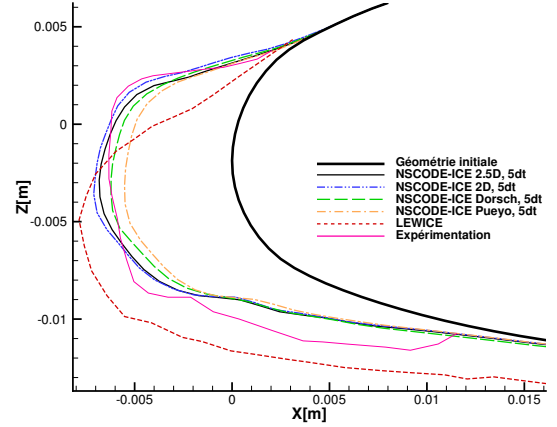


Figure 4.9 Formes de glaces obtenues avec un incrément de temps (a) et cinq incréments de temps (b) à la coupe A.

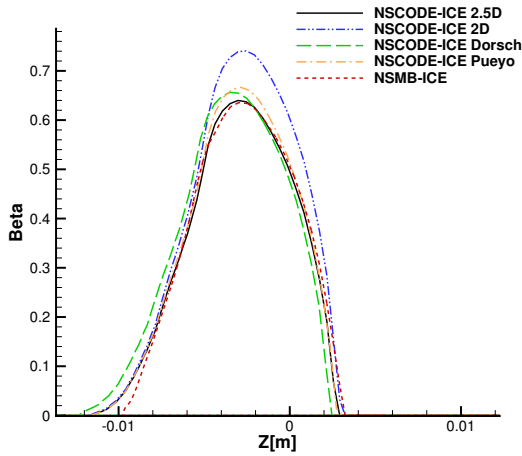


(a) Un incrément de temps

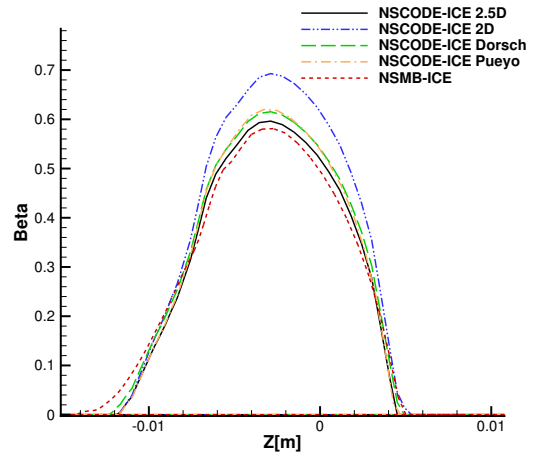


(b) Cinq incréments de temps

Figure 4.10 Formes de glaces obtenues avec un incrément de temps (a) et cinq incréments de temps (b) à la coupe B.



(a) Coupe A



(b) Coupe B

Figure 4.11 Courbes du taux de captation à la coupe A (a) et à la coupe B (b).

Ainsi les résultats des figures 4.9(b) et 4.10(b) montrent-ils qu'il est essentiel d'utiliser l'angle d'attaque effectif de la section étudiée pour la simulation d'une aile finie. Les résultats de LEWICE ont été alignés par concordance du point de stagnation numérique et avec le point de stagnation expérimental (Papadakis *et al.*, 2005). Cependant, dans le cas de la coupe B, l'alignement n'est pas parfait, au contraire des résultats calculés par NSCODE-ICE où la procédure de couplage subsonique visqueux avec VLM est beaucoup plus rigoureuse.

## CHAPITRE 5 CONCLUSION

Cette section présente un résumé du travail accompli au sein de ce projet. Les éléments limitants de la solution proposée sont aussi énoncés. Pour finir, quelques voies possibles d'amélioration sont proposées.

### 5.1 Synthèse des travaux

Le développement d'un nouveau programme simulant le givrage en vol, nommé NSCODE-ICE, a été réalisé. Ce programme est composé de différents modules permettant de résoudre l'écoulement de l'air, l'écoulement des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air et les échanges thermodynamiques sur la surface d'une géométrie afin d'en déterminer la nouvelle forme avec accumulation de glace. Les deux derniers modules ont été développés au cours de ce projet, tout comme l'algorithme d'évolution de la géométrie. Au début de ce mémoire, les problèmes les plus fréquents associés à la résolution de ces divers phénomènes physiques ont été présentés. Par la suite, les techniques employées par d'autres groupes de recherche pour résoudre ces problèmes ont été étudiées. Cette étude a orienté les choix effectués au moment du développement du programme bidimensionnel de givrage, ainsi que pour l'élaboration d'un modèle de givrage prenant en compte les effets tridimensionnels.

#### 5.1.1 Programme bidimensionnel de givrage

La hiérarchie du programme de givrage a d'abord été définie, ce qui a permis une meilleure organisation du travail. Le programme se base sur quelques modules développés au sein du groupe de recherche. Le mailleur NSGRID est employé pour la génération de maillages. Grâce à ce mailleur développé pour mailler les formes de glaces complexes, la régénération de maillage est possible lorsqu'un processus de givrage est décomposé en plusieurs incréments de temps. Le solveur Navier-Stokes NSCODE, développé à Polytechnique Montréal par l'équipe du professeur Laurendeau, est utilisé pour résoudre l'écoulement de l'air. Un préprocesseur permet l'utilisation de grilles superposées, ce qui permet de simuler des géométries à plusieurs éléments. La structure de base de NSCODE a servi à initier l'implémentation du solveur de champ de gouttelettes par souci de compatibilité.

Le système d'équations du champ de gouttelettes a été défini ainsi que les conditions limites particulières s'y appliquant. Trois schémas de solveur ont été présentés pour résoudre ces équations. Le premier est un solveur explicite Runge-Kutta, qui s'est avéré trop lent à conver-

ger. Le second est un solveur semi-implicite Runge-Kutta, pour lequel le système d'équations a dû être modifié afin d'obtenir un Jacobien convectif stabilisant le système. Cependant, le manque de robustesse du solveur et la faible accélération qu'il procure par rapport au solveur explicite ont mené à la recherche d'un solveur plus efficace. Le dernier solveur implémenté est un schéma d'Euler implicite où la matrice est construite indépendamment pour chaque équation et inversée par un algorithme BiCGStab très performant. Cela en fait un solveur très robuste et très rapide, ce qui remplit les critères recherchés. D'ailleurs, une comparaison entre la convergence des trois solveurs a été effectuée et a démontré l'efficacité supérieure du solveur implicite. Le module a été parallélisé à l'aide de l'interface OpenMP pour une amélioration de l'efficacité en temps. Des résultats sont présentés afin de montrer la fonctionnalité du solveur.

Le module thermodynamique requis pour l'accumulation de la glace a été développé à l'aide du modèle de Messinger itératif. Les bilans de masse et de matière du modèle de Messinger sont englobés dans une boucle où l'écoulement d'eau sous forme de film sur la surface est déterminé itérativement. Le coefficient de transfert de chaleur convectif est évalué empiriquement, tel que fait dans le modèle de Messinger standard. Lorsque la convergence du modèle thermodynamique est obtenue, la géométrie est modifiée à l'aide d'un algorithme simple, mais sans technique de conservation de la masse de glace.

Des résultats bidimensionnels sont présentés afin de valider le programme. Un cas de givre et un cas de verglas sont comparés à NSMB-ICE, un logiciel de givrage tridimensionnel, à d'autres codes et à des données expérimentales. Une comparaison est aussi effectuée entre plusieurs nombres d'incrément de temps. Cette comparaison montre qu'un certain nombre d'incrément de temps est requis afin d'obtenir une convergence en temps, comme la littérature le suggère. Les résultats de NSCODE-ICE obtenus concordent bien avec les résultats expérimentaux et numériques. Cependant, les résultats du cas de verglas présentent une zone de givrage trop restreinte pour une raison inconnue.

### 5.1.2 Givrage sur aile en flèche

Afin de modéliser certains effets tridimensionnels du givrage tout en simulant seulement une section bidimensionnelle, l'hypothèse de l'aile en flèche infinie est appliquée aux équations du champ de gouttelettes. Cette hypothèse veut que les paramètres restent constants dans la direction de l'envergure de l'aile. Cette hypothèse avait déjà été appliquée au solveur NSCODE, donnant des résultats intéressants impossibles à obtenir normalement en deux dimensions. Une nouvelle équation a donc été ajoutée au solveur Euler implicite et les conditions limites ont été modifiées pour considérer la résolution en 2.5D. L'efficacité du solveur n'est pas af-

fectée par cet ajout, même si la résolution d'une quatrième équation demande un temps de calcul supplémentaire. La simulation sur une aile infinie avec angle de flèche n'affecte en rien le solveur thermodynamique ni l'évolution de la géométrie. Donc ces modules ne sont pas modifiés.

Afin de valider les résultats obtenus en 2.5D, deux modèles géométriques simulant l'effet de l'angle de flèche sur une aile sont implémentés. Ces modèles sont composés de corrections et de changements de variables alors que le modèle 2.5D nécessite la résolution d'une nouvelle équation. La comparaison est effectuée sur une aile infinie à deux valeurs d'angle de flèche et montre que NSCODE-ICE donne des résultats très près des résultats tridimensionnels obtenus par NSMB-ICE. Les deux modèles géométriques fournissent des résultats plus adéquats que les simulations bidimensionnelles, mais sont plus éloignés des résultats de NSMB-ICE. Par la suite, une comparaison est effectuée sur une aile finie en flèche à deux sections. Un couplage subsonique avec une méthode linéaire a permis d'obtenir les angles effectifs à chaque section afin d'obtenir l'orientation réelle du givrage en simulation. Les résultats sont comparés cette fois à NSMB-ICE avec un incrément de temps, mais aussi à LEWICE avec cinq incréments de temps, ainsi qu'avec des données expérimentales. L'orientation et l'amplitude de la glace obtenues avec NSCODE-ICE est en accord avec les données expérimentales dans les deux cas, bien qu'une légère différence soit présente dans le cas de la section la plus courte.

Tout de même, ces comparaisons montrent qu'il est possible de modéliser adéquatement les effets tridimensionnels en givrage par l'utilisation de l'hypothèse de l'aile en flèche infinie, et ce, plus efficacement que les modèles géométriques. En effet, le point de stagnation devient une ligne de stagnation au bord d'attaque et la vitesse transversale des gouttelettes n'est donc pas nulle, ce qui est une amélioration notable par rapport à tous les modèles géométriques simulant la flèche en givrage.

## 5.2 Limitations de la solution proposée

L'aspect le plus limitant du programme développé est certainement le modèle thermodynamique. En effet, le modèle de Messinger est basé sur des relations empiriques qui ne répondent pas au critère de précision respecté par les autres solveurs qui ont été développés jusqu'au niveau d'état de l'art dans le domaine. La modélisation empirique du coefficient de transfert de chaleur convectif ne donne pas de bons résultats dans plusieurs cas et est très sensible dans la région du point de stagnation. Cela mène à une sous-estimation de la quantité de glace se formant dans cette région lorsque la température est au-dessus d'un certain seuil proche de la limite entre givre et verglas, ce qui entraîne un débalancement de l'écoulement de l'eau sur la géométrie. Or, l'algorithme itératif employé pour déterminer la direction et la

quantité d'eau s'écoulant sur la géométrie ne parvient pas correctement à simuler la glace de type verglas dans beaucoup de cas. Le problème peut être évité en simulant des conditions de givrage à la limite entre le verglas et le givre, où les quantités d'écoulement d'eau sont faibles. Une approche plus robuste est nécessaire avant l'implémentation en industrie.

L'algorithme d'évolution de la géométrie est aussi très limitant. En effet, sa simplicité et son caractère non conservatif entraîne une légère oscillation des nouvelles géométries lorsque plusieurs incréments de temps sont utilisés. Éventuellement, dans certains cas, ces oscillations peuvent mener à un repliement rapide de la géométrie sur elle-même, ce qui entraîne une défaillance du mailleur à l'itération suivante. Il ne s'agit pas d'une limite claire sur le nombre d'incrément de temps, car cette situation peut se présenter lorsque 20 incréments de temps sont utilisés, mais pas lorsque 40 sont utilisés. Cela rend l'algorithme moins fiable. Un algorithme conservatif, robuste et efficace est donc requis, surtout pour le transfert vers l'industrie.

Le programme est actuellement limité à la simulation de givrage sur des ailes simples, de façon général. En fait, il est possible de simuler le givrage sur une aile à plusieurs éléments, mais il n'est pas recommandé de diviser le temps d'accrétion de glace en plusieurs intervalles, afin d'éviter le remaillage, c'est-à-dire que NSGRID a la capacité de mailler un profil composé de plusieurs éléments distincts en utilisant plusieurs blocs, comme montré à la figure 3.2. Mais ce processus requiert une implication directe de l'utilisateur, ce qui ne peut être fait dans un processus automatique de givrage en plusieurs itérations.

### 5.3 Améliorations futures

Le programme développé dans le cadre de ce projet pourrait être amélioré de plusieurs façons. Quelques axes de développement sont d'abord proposés pour régler les limitations discutées plus haut. Quelques idées sont ensuite discutées afin de développer le programme au rang de référence en simulation de givrage.

#### 5.3.1 Solutions aux limitations

Il est évident pour l'auteur que le module thermodynamique doit être modifié afin d'être élevé au même niveau que les autres modules principaux en termes de précision, de robustesse et d'efficacité. Pour ce faire, l'implémentation d'un modèle basé sur des équations aux dérivées partielles pourrait même régler en partie le problème de l'évolution de la géométrie en même temps que le problème du modèle thermodynamique. En effet, la résolution d'un système de Saint-Venant appliqué au givrage, mieux connu sous le nom de «Shallow Water Icing

Model» (SWIM) en anglais, permet de résoudre l'épaisseur de glace formée et l'épaisseur du film d'eau s'écoulant dessus (Bourgault *et al.*, 2000). Un modèle intermédiaire basé sur des équations aux dérivées ordinaires, tel que celui développé par Myers et Charpin (2004), pourrait aussi être implémenté, mais l'approche par équations aux dérivées partielles semble préférable puisqu'elle respecte mieux la physique du problème thermodynamique. Dans les deux cas, l'écoulement de l'eau sur la glace serait bien résolu et permettrait de simuler des conditions de givrage de tous les types, givre comme verglas.

Bien que résolvant en partie le problème de l'évolution de la géométrie, puisque l'épaisseur de glace est directement évaluée par le système d'équations, l'approche discutée plus haut pourrait s'avérer non conservative sur la masse de glace accumulée au moment de modifier la forme du profil simulé. En effet, la discrétisation de la surface entraîne des discontinuités qui sont à l'origine des problèmes de conservation de la glace. L'évolution de la géométrie pourrait donc être effectuée à l'aide du modèle proposé par Thompson *et al.* (2013) et développé afin de gérer l'évolution de la géométrie d'un avion en condition de givrage en considérant les discontinuités. Cette propriété est illustrée à la figure 5.1.

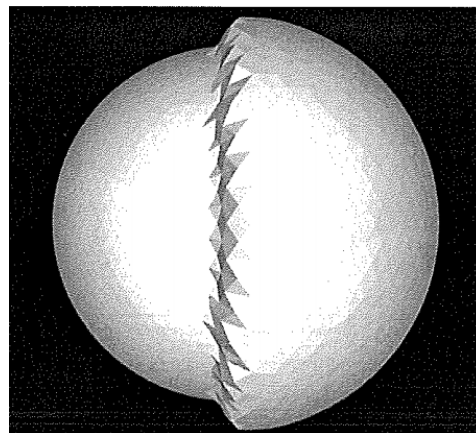


Figure 5.1 Sphère avec accumulation de glace discontinue (extrait de Thompson *et al.*, 2013).

Afin de simuler le givrage sur des ailes composés de plusieurs éléments, l'utilisation de maillages superposés semble la meilleure solution. Cette technique est déjà implémentée dans NSCODE, tel que montré à la section 3.2.3. La structure des modules exclusifs au givrage, le solveur de champ de gouttelettes et le module thermodynamique, a été développée en vue d'une implémentation de la technique chimère. Ainsi, le travail requis pour que le programme puisse simuler le givrage sur une aile composée de plusieurs éléments est-il minime. Toutefois, il serait intéressant d'améliorer le préprocesseur chimère afin d'y rendre disponible l'interaction solide à solide avec la méthode de Schwarz *et al.* (2010), par exemple. En effet, cela permettrait de mailler uniquement l'accumulation de glace et de superposer ce petit maillage sur la géométrie solide. La zone à mailler à chaque itération du processus de givrage serait plus restreinte, ce qui augmenterait l'efficacité générale du programme, et cette séparation réduirait les contraintes sur le maillage de l'aile, ce qui améliorerait la qualité du maillage.



### 5.3.2 Axes d'innovation

Des développements récents dans le domaine du givrage montrent qu'introduire un élément de hasard dans le processus de givrage permet d'accumuler de la glace ressemblant plus aux conditions réelles du givrage telles qu'expérimenté dans les souffleries. La technique, nommée modèle morphogénétique de givrage, consiste à accumuler la glace goutte par goutte en utilisant des probabilités afin d'ajouter du hasard dans le modèle thermodynamique. Ainsi, d'une simulation à une autre, une gouttelette d'eau peut-elle geler à l'impact ou ruisseler plus ou moins loin avant de geler (Butnarusu *et al.*, 2015; Szilder et Yuan, 2015). Les formes de glace obtenues par cette technique sont impressionnantes par leur similarité avec les formes expérimentales, telles que montré à la figure 5.2. Il serait intéressant d'étudier cette technique et d'envisager de l'inclure au modèle SWIM.

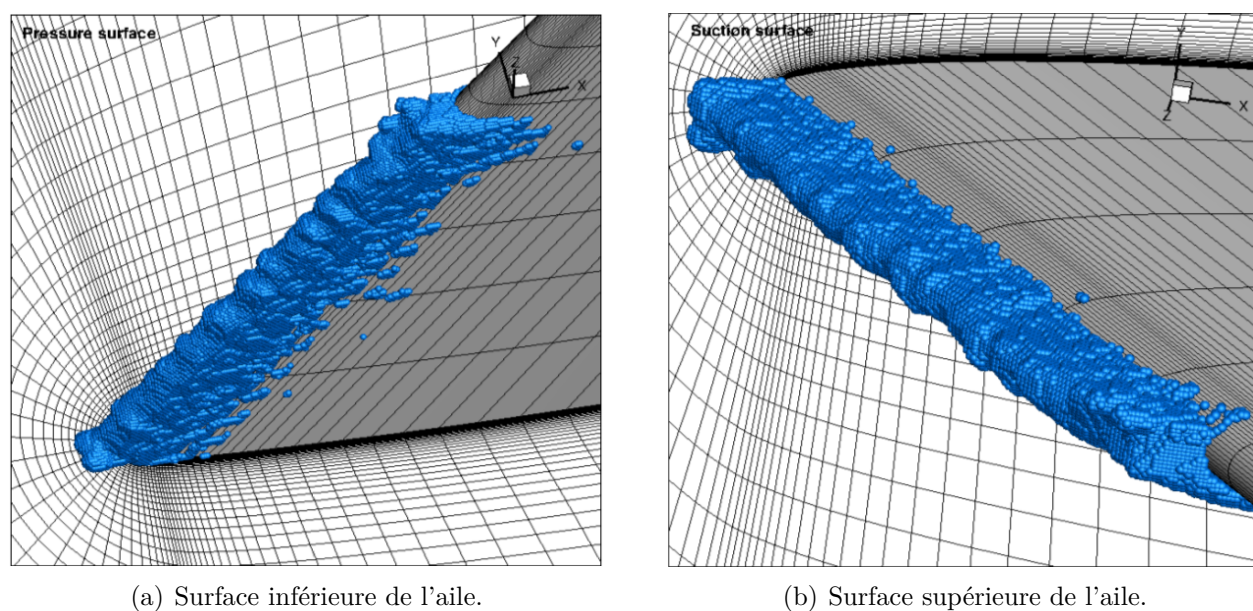


Figure 5.2 Accumulation de glace sur une aile en flèche avec algorithme morphogénétique (extrait de Butnarusu *et al.*, 2015).

Le modèle discuté précédemment constitue presque un modèle de givrage instationnaire. Cependant, afin d'obtenir un modèle totalement instationnaire, il faudrait résoudre tous les systèmes d'équations couplés, tel que fait par Naterer (2003). Ce dernier n'a validé son algorithme que sur une surface plane, afin de simplifier l'évolution de la surface. Pour résoudre le givrage de façon instationnaire, il faudra donc un algorithme d'évolution de la géométrie robuste. Les applications du givrage instationnaire sont nombreuses. Cela pourrait être utilisé afin de simuler l'effet de la glace sur le comportement d'un avion pendant une manoeuvre, par exemple. Il serait aussi possible de simuler adéquatement les systèmes de dégivrage, qui ne sont pas actifs en continu, et de vérifier s'ils sont assez efficaces pour éliminer la glace.

## RÉFÉRENCES

- BERTIN, J. J. et CUMMINGS, R. M., *Aerodynamics for Engineers*, 5e éd. Pearson International Edition, 2009.
- BLAZEK, J., *Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications*, 1er éd. Elsevier, 2001.
- BOURGAULT, Y., HABASHI, W. G., DOMPIERRE, J., et BARUZZI, G. S., “A finite element method study of eulerian droplets impingement models”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 29, pp. 429–449, 1999.
- BOURGAULT, Y., BEAUGENDRE, H., et HABASHI, W. G., “Development of a shallow-water icing model in fensap-ice”, *Journal of Aircraft*, vol. 37, no. 4, pp. 640–646, 2000.
- BOURGAULT-CÔTÉ, S. et LAURENDEAU, E., “Two-dimensional/infinite swept wing ice accretion model”, dans *53<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA, 2015. DOI : 10.2514/6.2015-0535
- BRAHIMI, M. T., TRAN, P., et PARASCHIVOIU, I., “Numerical simulation and thermodynamic analysis of ice accretion on aircraft wings”, École Polytechnique de Montréal, Rapp. tech., Mai 1994.
- BUTNARASU, M., HABASHI, W. G., et FOSSATI, M., “Optimization of the morphogenetic approach for in-flight icing”, dans *53<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA, 2015. DOI : 10.2514/6.2015-0034
- CAGNONE, J., SERMEUS, K., NADARAJAH, S. K., et LAURENDEAU, E., “Implicit multigrid schemes for challenging aerodynamic simulations on block-structured grids”, *Computers & Fluids*, vol. 44, pp. 314–327, 2011.
- CEBECI, T., SHAO, J. P., KAFYEKE, F., et LAURENDEAU, E., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, 1er éd. Springer, 2005.
- CHENGXIANG, Z., BIN, F., ZHIGUO, S., et CHUNLING, Z., “3d ice accretion simulation for complex configuration basing on improved messinger model”, dans *International Journal of Modern Physics : Conference Series*, vol. 19. World Scientific, 2012, pp. 341–350.

DORSCH, R. G. et BRUN, R. J., “A method for determining cloud-droplet impingement on swept wings”, NACA TN, Rapp. tech., Avr. 1953.

DURST, F., MILOJEVIC, D., et SCHÖNUNG, B., “Eulerian and lagrangian predictions of particulate two-phase flows : a numerical study”, *Applied Mathematics Modelling*, vol. 8, pp. 101–115, 1984.

FAA, *Airplane and Engine Certification Requirements in Supercooled Large Drop, Mixed Phase and Ice Crystal Icing Conditions*, Federal Aviation Administration Std. 213, Nov. 2014.

FERZIGER, J. H. et PERIC, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 1er éd. Springer, 1996.

FORTIN, G., ILINCA, A., LAFORTE, J.-L., et BRANDI, V., “New roughness computation method and geometric accretion model for airfoil icing”, *Journal of Aircraft*, vol. 41, no. 1, pp. 119–127, 2004.

FORTIN, G., LAFORTE, J.-L., et ILINCA, A., “Heat and mass transfer during ice accretion on aircraft wings with an improved roughness model”, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 45, pp. 595–606, 2006.

GALLAY, S., GHASEMI, S., et LAURENDEAU, E., “Sweep effects on non-linear lifting line theory near stall”, dans *52<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA, 2014.

GHASEMI, S., MOSAHEBI, A., et LAURENDEAU, E., “A two-dimensional/infinite swept wing navier-stokes solver”, dans *52<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA, 2014.

HASANZADEH, K., “Validation and user manual of canice2d-ns”, Bombardier Inc., Rapp. tech., Oct. 2014.

HASANZADEH, K., LAURENDEAU, E., SAEED, F., et PARASCHIVOIU, I., “Wing aerodynamic performance analysis and stall prediction using canice2d-ns icing code”, dans *CFD2012 Conference*. CFDSC, 2012.

HASANZADEH, K., LAURENDEAU, E., et PARASCHIVOIU, I., “Quasi-steady convergence of multi-steps navier-stokes icing simulations”, *Journal of Aircraft*, vol. 50, no. 4, pp. 1261–1274, 2013.

HASANZADEH, K., MOSAHEBI, A., LAURENDEAU, E., et PARASCHIVOIU, I., “Validation and verification of multi-steps icing calculation using canice2d-ns code”, dans *31<sup>st</sup>*

*AIAA Applied Aerodynamics Conference.* AIAA, 2013. DOI : 10.2514/6.2013-2671

HASANZADEH, K., LAURENDEAU, E., et PARASCHIVOIU, I., “Adaptive curvature control grid generation algorithms for complex glaze ice shapes rans simulations”, dans *53<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting.* AIAA, 2015. DOI : 10.2514/6.2015-0914

HEDDE, T. et GUFFOND, D., “ONERA three-dimensional icing model”, *AIAA Journal*, vol. 33, no. 6, pp. 1038–1045, 1995.

HONSEK, R., “Development of a three-dimensional eulerian model of droplet-wall interaction mechanisms”, Thèse de doctorat, McGill University, Montreal, Juin 2005.

HOSPERS, J. M. et HOEIJMAKERS, H. W. M., “Eulerian method for ice accretion on multiple-element airfoil sections”, dans *48<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting.* AIAA, 2010.

JAMESON, A., “Transonic flow calculations”, dans *Lecture Notes in mathematics.* Brezzi F, 1985, pp. 156–242.

JUNG, S. K., KIM, J. H., et MYONG, R. S., “Numerical model for eulerian droplet impingement in supercooled large droplet conditions”, dans *51<sup>st</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2013.

LÉVESQUE, A. T., PIGEON, A., DELOZE, T., et LAURENDEAU, E., “An overset grid 2d/infinite swept wing urans solver using recursive cartesian bucket method”, dans *53<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting.* AIAA, 2015. DOI : 10.2514/6.2015-0912

LIAN, C., XIA, G., et MERKLE, C. L., “Solution-limited time stepping to enhance reliability in cfd applications”, *Journal of Computational Physics*, vol. 228, pp. 4836–4857, 2009. DOI : 10.1016/j.jcp.2009.03.040

LIAN, C., XIA, G., et MERKLE, C. L., “Impact of source terms on reliability of cfd algorithms”, *Computers & Fluids*, vol. 39, pp. 1909–1922, 2010. DOI : 10.1016/j.compfluid.2010.06.021

MARTINELLI, L., “Calculation of viscous flows with a multigrid method”, Thèse de doctorat, Princeton University, Princeton, Oct. 1987.

MONTREUIL, E., CHAZOTTES, A., GUFFOND, D. *et al.*, “Enhancement of prediction capability in icing accretion and related performance penalties, parti : Three-dimensional

cfD prediction of the ice accretion”, dans *1<sup>st</sup> AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*. AIAA, 2009.

MYERS, T. G. et CHARPIN, J. P. F., “A mathematical model for atmospheric ice accretion and water flow on a cold surface”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 5483–5500, 2004. DOI : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.06.037

NATERER, G. F., “Eulerian three-phase formulation with coupled droplet flow and multimode heat transfer”, *Numerical Heat Transfer*, vol. 43, no. 4, pp. 331–352, 2003. DOI : 10.1080/713836223

ÖZGEN, S. et CANIBEK, M., “Ice accretion simulation on multi-element airfoils using extended messinger model”, *Heat Mass Transfer*, vol. 45, no. 3, pp. 305–322, 2009.

PAPADAKIS, M., YEONG, H. W., WONG, S. C., VARGAS, M., et POTAPCZUK, M., “Experimental investigation of ice accretion effects on a swept wing”, FAA, Rapp. tech., Août 2005.

PENA, D., HOARAU, Y., et LAURENDEAU, E., “Parallel computing of icing on three-dimensional airfoils”, dans *5<sup>th</sup> European Conference on Computational Mechanics*. ECCM, 2014.

PENA, D., LAURENDEAU, E., et HOARAU, Y., “Three-dimensional and multi-blocks ice accretion modeling in nsmb”, dans *4<sup>9<sup>th</sup></sup> 3AF International Symposium of Applied Aerodynamics*. 3AF, 2014.

PETROSINO, F., MINGIONE, G., CAROZZA, A., GILARDO, T., et D’AGOSTINI, G., “Ice accretion model on multi-element airfoil”, *Journal of Aircraft*, vol. 28, no. 6, pp. 1913–1920, 2011.

PIGEON, A., LEVESQUE, A. T., et LAURENDEAU, E., “Two-dimensional navier-stokes flow solver developments at École polytechnique de montréal”, dans *CFD Society of Canada 22<sup>nd</sup> Annual Conference*. CFDSC, 2014.

POTAPCZUK, M. G. et REINMANN, J. J., “Icing simulation : A survey of computer models and experimental facilities”, NASA Lewis Research Center, Rapp. tech., Mai 1991.

PUEYO, A., “Efficient 3d artificial ice shapes simulations with 2d ice accretion codes using a 3-level correction”, dans *SAE 2013 AeroTech Congress and Exhibition*, vol. 7. SAE International, 2013.

PUEYO, A., BRETTE, C., VAFA, S., et AKEL, I., “A comparison exercise of ice accretion simulations with 2d and 3d solvers”, dans *2007 SAE Aircraft and Engine Icing International Conference*, vol. 1. SAE International, 2007.

ROTHMAYER, A. P., MATHEIS, B. D., et TIMOSHIN, S. N., “Thin liquid films flowing over external aerodynamics surfaces”, *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 42, pp. 341–357, 2002.

RTO/NATO, “Ice accretion simulation evaluation test”, North Atlantic Treaty Organization, Rapp. tech., Nov. 2001.

SAAD, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2e éd. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

SAE, *Droplet Impingement and Ice Accretion Computer Codes*, SAE Standard ARP5903 Std., Déc. 2009.

SCHWARZ, T., SPIERING, F., et KROLL, N., “Grid coupling by means of chimera interpolation techniques”, dans *Second Symposium “Simulation of Wing and Nacelle Stall*, 2010.

SORENSEN, R. L., “A computer program to generate two dimensional grids about airfoils and other shapes by the use of poisson’s equation”, NASA, Rapp. tech., Mai 1980.

SPALART, P. R. et ALLMARAS, S. R., “A one-equation turbulence model for aerodynamic flows”, dans *30<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. AIAA, 1992.

SPEKREIJSE, S. P., “Elliptic grid generation based on laplace equations and algebraic transformations”, *Journal of Computational Physics*, vol. 118, pp. 38–61, 1995.

SZILDER, K. et YUAN, W., “The influence of ice accretion on the aerodynamic performance of a uas airfoil”, dans *53<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA, 2015. DOI : 10.2514/6.2015-0536

THOMPSON, D., TONG, C., ARNOLDUS, Q. *et al.*, “Discrete surface evolution and mesh deformation for aircraft icing applications”, dans *5<sup>th</sup> AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*. AIAA, 2013. DOI : 10.2514/6.2013-2544

VASSBERG, J. C. et JAMESON, A., “In pursuit of grid convergence for euler and navier-stokes equations”, *Journal of Aircraft*, vol. 47, no. 4, pp. 1152–1166, 2010. DOI : 10.2514/1.46737

VERSTEEG, H. K. et MALALASEKERA, W., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, 2e éd. Pearson, 2007.

WALDMAN, R. M. et HU, H., “High-speed imaging to quantify the transient ice accretion process on a naca 0012 airfoil”, dans *53<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*. AIAA, 2015. DOI : 10.2514/6.2015-0033

WANG, G. et ROTHMAYER, A. P., “Thin water films driven by air shear stress through roughness”, *Computers & Fluids*, vol. 38, pp. 235–246, 2009.

WRIGHT, W. B., GENT, R. W., et GUFFOND, D., “DRA/NASA/ONERA collaboration on icing research : Part ii–prediction of airfoil ice accretion”, NASA Lewis Research Center, Rapp. tech., Mai 1997.

WRIGHT, W. B. et RUTKOWSKI, A., “Validation results for lewice 2.0”, NASA, Rapp. tech., Jan. 1999.

ZHU, Z., LAURENDEAU, E., et MOKHTARIAN, F., “Cell-centered and cell vertex algorithms for complex flow simulations”, dans *8<sup>th</sup> Annual Conference of the CFD Society of Canada*. CFDSC, 2000.

## ANNEXE A Maillage tridimensionnel

La figure A.1 montre le maillage tridimensionnel utilisé afin d'obtenir les résultats de NSMB-ICE sur l'aile finie en flèche basée sur le profil GLC305. Ces résultats ont été présentés à la section 4.5.2. Le maillage structuré contient 3 906 000 éléments divisés en dix-sept (17) blocs.

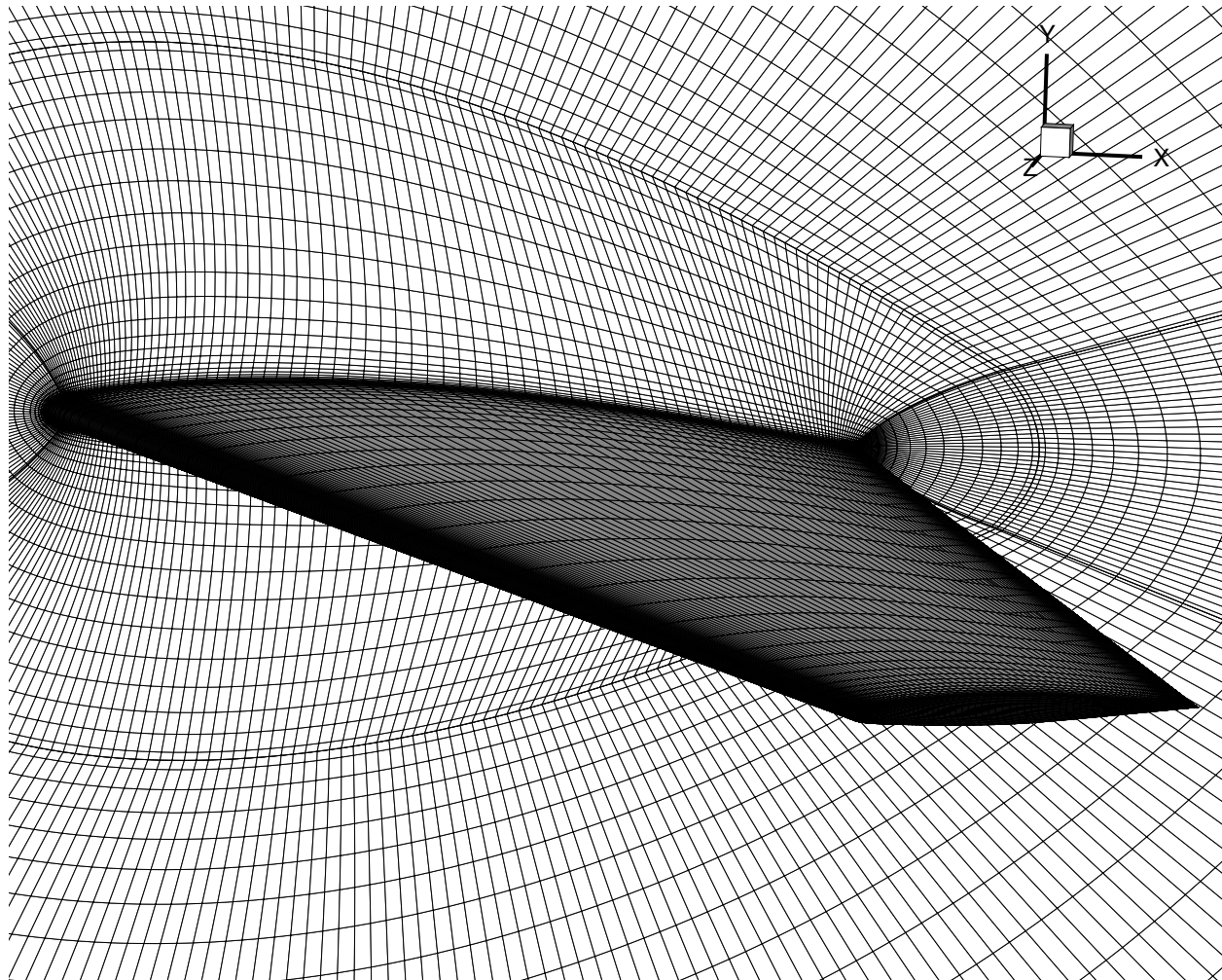


Figure A.1 Maillage utilisé pour simuler l'aile en flèche basée sur le profil GLC305.